# Geometria Proiettiva

# Parte I

# Punti e Rette

## 1.1 Il piano proiettivo

Una geometria piana è l'aver assegnato un insieme, i cui elementi si chiamano *punti*, e in esso aver distinto una famiglia di sottoinsiemi, detti *rette*. Su tali enti si fanno alcune richieste, dette *assiomi*; non scenderemo nel dettaglio di tale presentazione assiomatica, ma basti dire che il tratto distintivo della geometria proiettiva, sotto una tale luce, è la simmetria degli assiomi di intersezione:

I1 per ogni coppia di punti passa una ed una sola retta

I2 per ogni coppia di rette, esse si intersecano in uno ed un solo punto

Daremo ora un esempio di geometria proiettiva piana, legato, come vedremo, alla usuale geometria euclidea piana.

Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio euclideo, dotato di coordinate cartesiane; in esso dunque ad un punto corrisponde un'unica terna $(a, b, c)$ di numeri reali, le sue coordinate, per l'appunto, e viceversa ogni terna individua unicamente un punto.

Consideriamo l'insieme $\mathbb{P}^2$ i cui elementi sono le rette per l'origine $(0, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^3$. Gli elementi di tali insieme (le rette per l'origine) saranno detti *punti proiettivi*. Inoltre, per ogni piano $H$ per l'origine di $\mathbb{R}^3$, definiamo un sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$ come segue

$$\ell_H = \{r \in \mathbb{P}^2 \mid \ r \subset H\}$$

Diciamo tali sottoinsiemi, ottenuti variando $H$ tra i piani per l'origine, *rette proiettive*.

E' facile vedere che in questo modo abbiamo ottenuto una geometria piana proiettiva, data dall'insieme $\mathbb{P}^2$ e dalle rette $\{\ell_H\}$.

Consideriamo ora un piano affine (ovvero non passante per l'origine) $K$ in $\mathbb{R}^3$; definiamo

$$U_K = \{r \in \mathbb{P}^2 \mid \ r \cap K \neq \emptyset\}$$

Ovviamente $\mathbb{P}^2 \backslash U_K$ saranno le rette per l'origine che giacciono sul piano (sempre per l'origine) parallelo a $K$ (detto *giacitura* di $K$); esse costituiscono una retta proiettiva che chiameremo $\ell_K$.

Ora, definiamo la funzione $j_K : U_K \to K$ che manda il punto proiettivo (ovvero la retta per l'origine) $r \in U_K$ nel punto $j_K(r) = r \cap K$ in $K$. In poche parole, ad ogni retta associamo la sua intersezione con $K$. Segue abbastanza facilmente da tale definizione che $j_K(\ell_H) = H \cap K$ ed è dunque una retta di $K$; l'applicazione $j_K : U_K \to K$ si chiama *carta affine* e mostra come il nostro piano proiettivo si possa interpretare come un usuale piano euclideo ($K$) a cui è stata aggiunta una retta proiettiva ($\ell_K$), la *retta all'infinito*.

Notiamo che tale costruzione può essere eseguita a partire da qualunque piano affine $K$ e dunque la scelta di quale sia la retta all'infinito è, nella nostra presentazione del piano proiettivo, del tutto arbitraria. Discuteremo più avanti di cosa comporti esattamente la scelta di un preciso $K$.

### Esempi

1. La costruzione mostrata sopra può essere fatta anche per ottenere la retta proiettiva. Consideriamo $\mathbb{R}^2$, ovvero il piano euclideo con un fissato sistema di coordinate cartesiane; definiamo $\mathbb{P}^1$ come l'insieme delle rette per

l'origine $(0,0)$ di $\mathbb{R}^2$. E' abbastanza evidente che ogni $\ell_H$ è un esempio di $\mathbb{P}^1$. Similmente, possiamo costruire lo spazio proiettivo, considerando le rette per l'origine di $\mathbb{R}^4$, lo spazio a 4 dimensioni, rappresentabile come l'insieme delle $4-$uple di numeri reali $(a,b,c,d)$; analogamente a quanto fatto finora, $\mathbb{P}^3$ sarà l'insieme delle rette per $(0,0,0,0)$ ed ogni $(2-)$piano $H$ per l'origine definirà una retta proiettiva $\ell_H$, mentre ogni $3-$piano $V$ per l'origine definirà un piano proiettivo $\pi_V$.

2. Ripetendo la costruzione delle carte affini per la retta proiettiva $\mathbb{P}^1$, ci accorgiamo che essa può essere vista come la retta euclidea a cui è stato aggiunto un punto proiettivo (un punto, comunque), che fa da punto all'infinito. Volendo quindi interpretare in questo modo anche le rette del piano proiettivo, possiamo dire che quest'ultimo è ottenuto dal piano euclideo aggiungendovi una retta euclidea e un punto euclideo, entrambi all'infinito e il secondo all'infinito della prima. Si possono ottenere carte affini anche dello spazio proiettivo, che risulterà dunque lo spazio euclideo a cui è stato aggiunto il piano proiettivo all'infinito.

3. Un'intuizione di $\mathbb{P}^2$ più vicina a quello che normalmente è un "piano" può essere ottenuta come segue: una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$ è univocamente determinata da un suo punto che non sia l'origine. Possiamo dunque associare ad ogni retta i suoi punti che stanno a distanza 1 dall'origine, ovvero le sue intersezioni con la sfera unitaria; ovviamente, sulla sfera, due punti diametralmente opposti individuano la stessa retta. Quindi dovremo considerare solo un emisfero, con qualche attenzione sull'equatore; sia dunque $U$ un emisfero (privo dell'equatore) e sia $\ell$ l'equatore. Su $\ell$ si trovano ancora punti diametralmente opposti, ma non su $U$. Inoltre, se consideriamo il piano che passa per $\ell$ e ne prendiamo uno parallelo $K$ che sia tangente in un punto di $U$, otterremo che i punti proiettivi che corrispondono a coppie di punti opposti su $\ell$ sono esattamente quelli di $\ell_K$, mentre i punti di $U$ corrispondono ai punti proiettivi di $U_K$. In particolare, possiamo così definire una mappa tra $U$ e $K$ che sarà la proiezione di centro l'origine. Così otteniamo un modello abbastanza maneggevole di $\mathbb{P}^2$ costituito da una semisfera chiusa dall'equatore, in cui i punti diametralmente opposti dell'equatore sono identificati e le rette sono gli archi di cerchio massimo.

4. Consideriamo due piani affini $K$ e $N$ che siano paralleli, a distanze $d$ e $d'$ dall'origine. Siano $j_K : U_K \to K$ e $j_N : U_N \to N$ le due carte affini associate. Innanzitutto vediamo che $U_K = U_N$; ciò può essere dimostrato velocemente notando che, visto che sono paralleli, essi hanno la stessa giacitura e dunque $\ell_K = \ell_N$, ma $U_K = \mathbb{P}^2 \setminus \ell_K = \mathbb{P}^2 \setminus \ell_N = U_N$. Ora, ci domandiamo cosa accada operando la composizione $\phi_{KN} = j_K \circ j_N^{-1}$; ovvero, prendiamo un punto di $N$ e consideriamo il punto proiettivo di $U_N$ che vi corrisponde tramite $j_N$, dopo di che consideriamo l'immagine di tale punto tramite $j_K$ (possiamo perchè $U_N = U_K$). Così definiamo una mappa da $N$ a $K$. In termini più espliciti, il punto proiettivo che corrisponde a $P \in N$ è la retta $r_P$ per $P$ e l'origine; $j_K(r_P)$ è per definizione $r_P \cap K$. Dunque $\phi_{KN}$ è la proiezione di $N$ su $K$ dall'origine, ovvero è un'omotetia di centro l'origine e fattore $d/d'$, che manda appunto $N$ su $K$.

## Esercizi

1. Consideriamo l'insieme $X$ dei piani per l'origine di $\mathbb{R}^3$; per ogni retta $r$ per l'origine, sia $\ell_r = \{H \in X \mid H \supset r\}$. Dimostrare che l'insieme $X$ con i sottoinsiemi $\ell_r$ come rette rispetta i due assiomi di intersezione (esso è dunque una geometria proiettiva ed in realtà è identico a $\mathbb{P}^2$) e determinare una possibile costruzione per le sue carte affini.

2. La costruzione descritta nell'esempio 3 non può essere realizzata fisicamente in 3 dimensioni (non si possono incollare tra loro tutti i punti opposti sull'equatore di una semisfera). Ripetere i ragionamenti lì mostrati per $\mathbb{P}^1$ e verificare che invece per quest'ultimo la costruzione può essere realizzata in 2 dimensioni, determinando quale oggetto "familiare" è in realtà $\mathbb{P}^1$.

3. Siano $K : \{x = 1\}$ e $N : \{y = 1\}$ due piani affini e siano $j_K : U_K \to K$ e $j_N : U_N \to N$ le rispettive carte affini. Dimostrare che $U_K \neq U_N$ ma che $W = U_K \cap U_N \neq \emptyset$; determinare $j_K(W)$ e $j_N(w)$, come sottoinsiemi dei piani $K, N$.

4. Nella notazione dell'esercizio precedente, scrivere in coordinate la trasformazione $\phi_{KN} = j_K \circ j_N^{-1} : j_N(W) \to j_K(W)$; ovvero, fissato un punto $P : (u, 1, v)$ che stia in $j_N(W)$, determinare in funzione di $u, v$ le coordinate $(1, t, s)$ di $\phi_{KN}(P)$.

5. Dati due generici piani affini $K, N$ non paralleli e non per l'origine, dimostrare che $W = U_K \cap U_N$ non è vuoto e non coincide con $U_K$ o con $U_N$; determinare $j_K(W)$ e $j_N(W)$; scrivere esplicitamente in coordinate $\phi_{KN} : j_N(W) \to j_K(W)$.

6. Dati 3 piani affini $K, M, N$ non per l'origine tra cui non ve ne siano due paralleli, sia $W = U_K \cap U_M \cap U_N$. Dimostrare che $W$ non è vuoto e determinare la scrittura in coordinate di

$$\phi_{KM} \circ \phi_{MN} \circ \phi_{NK} : j_K(W) \to j_K(W)$$

## 1.2 Coordinate proiettive

La notazione $[a, b, c]$, per $a, b, c \neq 0$, indica la *terna omogenea* rappresentata dalla terna $(a, b, c)$, ovvero l'insieme

$$\{(ka, kb, kc) \mid k \in \mathbb{R}^*\}$$

di tutte le terne non nulle che sono multiple di $(a, b, c)$. In termini geometrici, fissato un punto $P : (x, y, z)$ diverso dall'origine, $[x, y, z]$ è l'insieme delle terne che rappresentano le coordinate dei punti sulla retta tra $P$ e l'origine, esclusa quest'ultima.

Tali terne omogenee sono ovviamente un ottimo strumento per fissare delle coordinate su $\mathbb{P}^2$. D'ora in poi identificheremo quindi l'insieme delle rette per l'origine di $\mathbb{R}^3$ con l'insieme delle terne omogenee. Notiamo che due terne $(a, b, c)$ e $(a', b', c')$ rappresentano la stessa terna omogenea, ovvero si ha $[a, b, c] = [a', b', c']$, se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}^*$ tale che $a = ka'$, $b = kb'$ e $c = kc'$, ovvero se i rispettivi punti in $\mathbb{R}^3$ sono allineati rispetto all'origine.

Un piano $H$ per l'origine di $\mathbb{R}^3$ è l'insieme dei punti le cui coordinate rispettano un'equazione del tipo $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Ovviamente, se $(x, y, z)$ è una soluzione, anche $(kx, ky, kz)$ lo è, per ogni $k \in \mathbb{R}^*$; quindi ha senso dire che la terna omogenea $[a, b, c]$ è soluzione (o meno) di $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, in quanto se, per qualche $k \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$\alpha(ka) + \beta(kb) + \gamma(kc) = 0$$

allora lo si ha per ogni $k \in \mathbb{R}^*$ e dunque ogni elemento di $[a, b, c]$ è soluzione dell'equazione. Ha dunque senso anche la scrittura

$$\ell_H = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid \ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$$

che rappresenta la retta proiettiva associata al piano $H$; tale retta proiettiva è individuata dai coefficienti $\alpha, \beta, \gamma$, a meno ovviamente di una comune costante moltiplicativa non nulla. Essa è dunque individuata a sua volta dalla terna omogenea $[\alpha, \beta, \gamma]$.

In notazione vettoriale, possiamo scrivere che $H = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot h = 0\}$ dove $h \in \mathbb{R}^3$ è dato da $h = (\alpha, \beta, \gamma)$ (o un suo multiplo); quindi anche nel proiettivo possiamo scrivere che $\ell_H = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid (x, y, z) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = 0\}$. Si noti che in generale il prodotto scalare tra due terne omogenee non può essere definito in maniera univoca (dipende da quali rappresentanti si scelgono), ma si può solo dire se è nullo o meno.

Consideriamo ora i tre piani affini

$$K_0 : \{x = 1\} \qquad K_1 : \{y = 1\} \qquad K_2 : \{z = 1\}$$

e i tre sottoinsiemi del piano proiettivo corrispondenti $U_0, U_1, U_2$, complementari di $\ell_0, \ell_1, \ell_2$ rispettivamente; siano inoltre $j_{U_0}, j_{U_1}, j_{U_2}$ le carte affini associate.

Ora, si ha $\ell_0 = \{r \in \mathbb{P}^2 \mid \ r \cap K_0 = \emptyset\}$. Se la retta $r$ è associata alla terna omogenea $[x, y, z]$, il fatto che $r \cap K_0$ sia vuoto è equivalente al fatto che in tale terna omogenea non vi sia alcuna terna del tipo $(1, s, t)$, ovvero che non si abbia mai $[x, y, z] = [1, s, t]$ per alcuna scelta di $s, t$. Questo è possibile se e solo se $x = 0$. Infatti, se $x \neq 0$, sia $k = 1/x$, allora $(kx, ky, kz) = (1, y/x, z/x)$ è un rappresentate di[1] $[x, y, z]$.

Dunque $\ell_0 = \{[x, y, z] \mid \ x = 0\}$, ovvero corrisponde al piano $H_0 : x = 0$ che in effetti è la gacitura di $K_0$. Similmente

$$\ell_1 = \{[x, y, z] \mid \ y = 0\} \qquad \ell_2 = \{[x, y, z] \mid \ z = 0\}$$

Per complementare, si avrà

$$U_0 = \{[x, y, z] \mid \ x \neq 0\}$$

e similmente $U_1, U_2$ corrispondono agli insiemi di terne omogenee con la seconda o la terza coordinata non nulla.

Consideriamo quindi la mappa $j_{U_0} : U_0 \to K_0$. Scelta $[x, y, z] \in U_0$, il punto di incontro della retta associata con $K_0$ sarà l'unico rappresentate di tale terna omogenea della forma $[1, s, t]$; per quanto detto prima sarà $(1, y/x, z/x)$. Quindi

$$j_{U_0}([x, y, z]) = \left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

[1] che è un altro modo di dire *appartiene a*

e similmente $j_{U_1}, j_{U_2}$ corrispondono alla divisione per $y$ e per $z$.

Possiamo quindi definire una mappa da $U_0$ su $\mathbb{R}^2$, il piano euclideo, che porta la terna omogenea $[x, y, z]$ con $x \neq 0$ nel punto $(y/x, z/x)$; tale mappa verrà chiamata $j_0$ e allo stesso modo verranno definite $j_1, j_2$. Tali mappe (dette *carte coordinate*) permettono di legare la geometria proiettiva con quella euclidea; quella più spesso usata è $j_2$, definita sull'insieme di terne omogenee della forma $[x, y, 1]$. Ovviamente possiamo anche definire gli inversi di queste mappe, come $i_0, i_1, i_2$, ponendo

$$i_0(u, v) = [1, u, v] \qquad i_1(u, v) = [x, 1, y] \qquad i_2(u, v) = [x, y, 1]$$

## Esempi

1. Ovviamente quanto detto si può estendere alla retta proiettiva $\mathbb{P}^1$, su cui le coordinate saranno date da coppie omogenee, o allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$, su cui invece troveremo le quadruple omogenee.

2. Per lavorare con le terne omogenee, può essere comodo, a volte, adottare una qualche *normalizzazione*, che permetta di scegliere tra tutte le terne che rappresentano una data $[a, b, c]$, un rappresentante fissato. Ad esempio, si può chiedere che sia soddisfatta una relazione del tipo

   $$ha + kb + jc = T$$

   (vedremo poi che una tale condizione non permette di fissare rappresentanti per tutte le terne) oppure qualcosa del tipo

   $$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

   Tale condizione non individua univocamente un rappresentante, ma, a causa dell'elevamento a quadrato, determina *due* rappresentanti per ogni terna omogenea. E' facile accorgersi che la seconda condizione equivale a identificare ogni retta per l'origine tramite i due punti che essa individua sulla sfera unitaria.

3. Consideriamo i due punti proiettivi $[1, 0, 0]$ e $[0, 1, 0]$ e cerchiamo la retta proiettiva che passa per essi. Dobbiamo trovare una terna omogenea di coefficienti $[\alpha, \beta, \gamma]$ di modo che la retta $\ell : \{\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ contenga i due punti suddetti, ovvero di modo che

   $$\begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

   In questo semplice caso, le due equazioni si riducono a

   $$\alpha = 0 \qquad \beta = 0$$

   e dunque le soluzioni saranno del tipo $[0, 0, \gamma]$; ma al variare di $\gamma$ tra i reali non nulli[2] questa è sempre la stessa terna, che possiamo scrivere come $[0, 0, 1]$. Dunque la retta per tali due punti sarà $z = 0$.

[2] $\gamma$ non può essere nullo, in quanto, nella definizione di terna omogenea, abbiamo imposto che vi fosse almeno una componente non nulla.

4. Consideriamo le due rette proiettive $x + y = 0$ e $z + 2x = 0$ e determiniamone l'intersezione. Dobbiamo trovare un punto proiettivo $[x, y, z]$ che soddisfi entrambe le equazioni, ovvero dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ 2x + z &= 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $y = -x$ e dalla seconda $z = -2x$; vediamo che, se $x = 0$, allora anche $y = z = 0$, che non è accettabile, dunque possiamo porre $x \neq 0$ e quindi (a meno di dividere il rappresentante della terna per $x$) possiamo ritenere $x = -1$. Dunque, il punto di incontro è $[-1, 1, 2]$.

5. Consideriamo una generica retta $\ell : \{\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ con $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ e determiniamo l'equazione dell'immagine attraverso le tre mappe $j_0, j_1, j_2$. Per far ciò, intersechiamo la retta data con le tre rette $\ell_0, \ell_1, \ell_2$:

$$T_0 = \ell \cap \ell_0 : \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

ovvero $T_0 : [0, \gamma, -\beta]$; similmente $T_1 = \ell \cap \ell_1 : [\gamma, 0, -\alpha]$ e $T_2 = \ell \cap \ell_2 : [\beta, -\alpha, 0]$. Dunque, supponendo di voler studiare $r_0 = j_0(\ell)$, avremo che $T_0 \notin U_0$, ma $T_1, T_2 \in U_0$, quindi $r_0$ passerà per i punti

$$j_0(T_1) = \left(0, -\frac{\alpha}{\gamma}\right) \qquad j_0(T_2) = \left(-\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$$

e dunque $r_0 : \{\beta u + \gamma v + \alpha = 0\}$. Allo stesso modo si possono determinare le equazioni di $r_1 = j_1(\ell)$ e $r_2 = j_2(\ell)$ che sono

$$r_1 : \{\alpha u + \gamma v + \beta = 0\} \qquad r_2 = \{\alpha u + \beta v + \gamma = 0\}$$

6. Consideriamo la mappa $j_2$, definita su $U_2 = \mathbb{P}^2 \setminus \ell_2$ nel piano euclideo. Siano $\ell : \{x - y = 0\}$, $\ell' : \{x - y + z = 0\}$; esse si intersecano in $P : [1, 1, 0]$. Per tali due rette possiamo definire $T_0, T_0', T_1, T_1'$ come nell'esempio precedente e dunque possiamo dire che

$$r = j_2(\ell) : \{u - v = 0\} \qquad r' = j_2(\ell') : \{u - v + 1 = 0\}$$

Dunque $r \parallel r'$. In generale, dato $Q : [a, b, 0] \in \ell_2$ con $a, b \neq 0$, due rette $\ell, \ell'$ si intersecano in $Q$ se e solo se

$$\alpha a + \beta b = 0 = \alpha' a + \beta' b$$

con $\ell : \{\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ e $\ell' : \{\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0\}$. Dunque si ha che $[\alpha, \beta, \gamma] = [b, -a, \gamma]$ e $[\alpha', \beta', \gamma'] = [b, -a, \gamma']$ e perciò

$$j_2(\ell) : \{bu - av + \gamma = 0\} \qquad j_2(\ell') : \{bu - av + \gamma' = 0\}$$

ovvero, le due rette sono parallele. In altri termini, due rette che si incontrano su $\ell_i$ avranno, tramite $j_i$, come immagini due rette parallele; questo vale anche per due rette che si incontrano su $\ell_K$, se si considerano le loro immagini su $K$ tramite $j_K$.

## Esercizi

1. Dimostrare che le terne omogenee $[a, b, c]$ e $[d, e, f]$ coincidono se e solo se

$$ae - bd = af - dc = db - ec = 0$$

2. Dimostrare che l'insieme delle terne omogenee $[a, b, c]$ per cui si possa scegliere un rappresentante tale che $ha + kb + jc = T$ è esattamente $U_K$ con $K : \{hx + ky + jz = T\}$ e tale rappresentante è proprio $j_K([a, b, c])$.

3. Scrivere l'equazione della retta $\ell_k$ per i punti $[1, k, 0]$ e $[0, k, k-1]$, con $k \in \mathbb{R}$ e l'equazione di $r_k = j_1(\ell_k)$, se possibile (ovvero se $\ell_k \neq \ell_1$). $(\star)$ Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'inviluppo delle rette $r_k$.

4. Sia $\ell_U$ una retta tale che $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_U$ sono a tre a tre non concorrenti. Per ogni altra retta $\ell$, siano $T_0, T_1, T_2, T_3$ le rispettive intersezioni con tali quattro rette; dimostrare che ogni $U_i$ $i = 0, 1, 2$ contiene almeno due di tali punti. Utilizzare questo fatto per ottenere il risultato dell'esempio 4 per una retta generica (ammettendo anche che alcuni coefficienti si annullino), dimostrando che il procedimento con 4 rette fallisce solo per un numero finito di rette, che si possono trattare a mano.

5. Sia $F(x, y, z)$ un polinomio omogeneo in $x, y, z$ di grado $d$; dimostrare che

$$F(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow F(ka, kb, kc) = 0 \qquad \forall\ k \in \mathbb{R}^*$$

Dunque è ben definito l'insieme $X = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$; dimostrare che $j_0(X) = \{(u, v) \mid F(1, u, v) = 0\}$ e similmente per $j_1, j_2$.

6. Determinare l'insieme $W = j_1(i_0(\mathbb{R}^2))$ e scrivere in coordinate la trasformazione

$$j_0 \circ i_1 : W \to \mathbb{R}^2$$

e fare lo stesso per le composizioni $j_0 \circ i_2$ e $j_1 \circ i_2$.

7. Dimostrare che le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} Ax + By + Cz &= 0 \\ Dx + Ey + Fz &= 0 \end{cases}$$

formano[3] la terna omogenea $[BF - EC, DC - AF, AE - DB]$, dove la $i-$esima componente è ottenuta calcolando il determinante della matrice quadrata ottenuta da

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

eliminando la $i-$esima colonna e moltiplicando per $(-1)^{i+1}$.

8. Utilizzare l'esercizio precedente per ricavare l'espressione del punto di intersezione di due generiche rette e della retta passante per due punti.

[3]Supponendo che $[A, B, C] \neq [D, E, F]$

## 1.3 Trasformazioni proiettive

Cambiando linearmente coordinate[4] in $\mathbb{R}^3$ in modo da lasciar fissa l'origine, poiché le rette per l'origine vanno in rette per l'origine, otteniamo una trasformazione indotta su $\mathbb{P}^2$; più esplicitamente, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare che fissa l'origine, per ogni retta $r$ per l'origine, $T(r)$ sarà ancora una retta per l'origine ed ha senso definire la trasformazione $\tilde{T} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ come

$$\tilde{T}([a, b, c]) = [T(a, b, c)]$$

Infatti, una trasformazione lineare è tale che $T(ka, kb, kc) = kT(a, b, c)$ per ogni $k \in \mathbb{R}^*$. In coordinate, se

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

[5]allora

$$\tilde{T}([x, y, z]) = [a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z]$$

che scriveremo anche
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
dove, se $A$ è una matrice, con $[A]$ si intende l'insieme delle matrici multiple di $A$:
$$[A] = \{kA \mid k \in \mathbb{R}^*\}.$$

Tale scrittura è sensata, in quanto se invece della matrice $A$ e del vettore $v = (x, y, z)$ si scelgono la matrice $kA$ e il vettore $hv$, si avrà che $[kA \cdot hv] = [kh(A \cdot v)] = [A \cdot v]$. Dunque, due trasformazioni di $\mathbb{R}^3$ $T, T'$ inducono la stessa trasformazione proiettiva se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}^*$ tale che $T(v) = kT'(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

Ovviamente, trasformando rette per l'origine in rette per l'origine, una tale trasformazione $T$ porta anche piani per l'origine in piani per l'origine. Dunque $\tilde{T}$ è una trasformazione del piano proiettivo in sè che porta rette in rette e conserva le proprietà di intersezione (in quanto la trasformazione $T$ è bigettiva). Tale $T$ si dice *trasformazione proiettiva* o, più brevemente, *proiettività*.

Nel seguito, se non vi sono rischi di fraintendimento, tralasceremo il simbolo $\tilde{}$ sulla trasformazione proiettiva indotta da una affinità $T$, indicando entrambe con la stessa lettera. Inoltre, dovrebbe essere chiaro che parlare di trasformazioni proiettive o di matrici omogenee $[A]$ è identico, come lo è parlare di affinità che fissano l'origine e di matrici. Diremo $T$ la trasformazione associata alla matrice $A$ se $T(v) = A \cdot v$. Ovviamente, il legame tra proiettività e matrici omogenee è tale che, se $T, S$ sono proiettività associate alle matrici $A, B$, allora $T \circ S$ è associata alla matrice $A \cdot B$ e, in particolare, l'inversa di $T$ è associata all'inversa di $A$.

[4]Ovvero, applichiamo un'affinità

[5]Ovviamente, siamo nell'ipotesi che la matrice $A = (a_{ij})$ abbia determinante non nullo e sia dunque invertibile, di modo che la trasformazione $T$ sia biunivoca.

Dati due punti proiettivi $P : [a, b, c]$ e $Q : [d, e, f]$, una trasformazione $T$ associata ad una matrice $A$ manda $P$ in $Q$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}^*$ tale che

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kd \\ ke \\ kf \end{pmatrix}$$

Ovvero, se chiamiamo $a_{ij}$ gli elementi di $A$, se e solo se

$$a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c = kd$$

$$a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c = ke$$

$$a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c = kf$$

per qualche $k \in \mathbb{R}^*$. Se ora prendiamo come punto $P$ il punto $[1, 0, 0]$, queste tre equazioni si riducono a

$$a_{11} = kd \qquad a_{21} = ke \qquad a_{31} = kf$$

ovvero $[a_{11}, a_{21}, a_{31}] = [d, e, f]$. Similmente, se poniamo $P = [0, 1, 0]$ e $Q = [p, q, r]$, otterremo la condizione $[a_{12}, a_{22}, a_{32}] = [p, q, r]$ e, se poniamo $P = [0, 0, 1]$ e $Q = [s, t, u]$, avremo $[a_{13}, a_{23}, a_{33}] = [s, t, u]$. Queste tre condizioni sono indipendenti e quindi possono sempre essere soddisfatte, ad esempio fissando

$$A = \begin{pmatrix} d & p & s \\ e & q & t \\ f & r & u \end{pmatrix}$$

Si nota però che, poste le tre condizioni

$$T([1, 0, 0]) = [d, e, f] \qquad T([0, 1, 0]) = [p, q, r] \qquad T([0, 0, 1]) = [s, t, u]$$

le matrici $A$ a cui è associata una trasformazione $T$ che le rispetti non sono solo i multipli di quella appena scritta; da quanto fatto basta che le colonne siano separatamente multipli delle colonne di quella, non necessariamente con gli stessi rapporti. Dunque, la generica matrice che soddisfa queste condizioni è

$$A^{h,k,j} = \begin{pmatrix} hd & kp & js \\ he & kq & jt \\ hf & kr & ju \end{pmatrix}$$

per $h, k, j$ non nulli; inoltre, $[A^{h,k,j}] = [A^{h',k',j'}]$ se e solo se $[h, k, j] = [h', k', j']$, infatti se tale condizione tra le terne di parametri sussiste, ovviamente le due matrici sono una multipla dell'altra e, se sono multiple, si avrà che $[hd, kp, js] = [h'd, k'p, j's]$ e quindi $hd = \alpha h'd$ (e simili per le altre due coordinate) da cui $h = \alpha h'$ (e simili).

Notiamo che

$$A^{h,k,j} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = hx \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + ky \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + jz \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

Se i tre punti $(d, e, f)$, $(p, q, r)$, $(s, t, u)$ sono a due a due non allineati, ogni punto si può rappresentare in modo unico come una loro combinazione lineare (ovvero proprio nella forma scritta sopra). Dunque, fissiamo $[x, y, z] = [1, 1, 1]$ e scegliamo un quarto punto $[l, m, n]$ che non sia su una delle rette individuate dai tre punti già scelti. Allora possiamo chiedere che

$$T([1, 1, 1]) = [l, m, n]$$

ponendo che, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si abbia

$$h \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda l \\ \lambda m \\ \lambda n \end{pmatrix}$$

Se $[l, m, n]$ rispetta la condizione già detta, tale sistema è risolubile per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e dunque fornisce una terna omogenea $[h, k, j]$ tale che, se $T$ è la trasformazione proiettiva associata alla matrice $A^{h,k,j}$, si ha

$$T([1, 0, 0]) = [d, e, f] \qquad T([0, 1, 0]) = [p, q, r] \qquad T([0, 0, 1]) = [s, t, u]$$
$$T([1, 1, 1]) = [l, m, n]$$

e $T$ è l'unica trasformazione proiettiva che soddisfa queste condizioni.

Abbiamo dunque dimostrato il seguente risultato.

**Teorema 1 (fondamentale delle proiettività)** *Siano $A$, $B$, $C$, $D$ quattro punti proiettivi a tre a tre non allineati. Allora esiste un'unica trasformazione proiettiva $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che*

$$T([1, 0, 0] = A \quad T([0, 1, 0]) = B \quad T([0, 0, 1]) = C \quad T([1, 1, 1]) = D$$

Una simile quaterna si dice *riferimento proiettivo*; otteniamo immediatamente il seguente corollario

**Teorema 2** *Siano $A, B, C, D$ e $P, Q, R, S$ due riferimenti proiettivi; allora esiste un'unica proiettività $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che*

$$T(A) = P \quad T(B) = Q \quad T(C) = R \quad T(D) = S$$

## Esempi

1. Ovviamente, possiamo ripetere quanto fatto per la retta e lo spazio proiettivi; sulla prima le trasformazioni saranno associate a matrici $2 \times 2$, sul secondo a matrici $4 \times 4$. Un riferimento proiettivo per la retta sarà fatto di 3 punti distinti (a due a due non coincidenti), mentre un riferimento proiettivo per lo spazio sarà dato da 5 punti a quattro a quattro non complanari.

2. Le matrici che inducono come trasformazione proiettiva l'identità sono quelle che appartengono a $[I]$, ovvero le matrici che rappresentano un'omotetia di $\mathbb{R}^3$; infatti, tramite un'omotetia di centro l'origine, ogni retta va in se stessa, quindi ogni punto di $\mathbb{P}^2$ rimane fisso sotto la trasformazione associata.

3. Siano $V_0 = [1,0,0]$, $V_1 = [0,1,0]$, $V_2 = [0,0,1]$, $U = [1,1,1]$; sia inoltre $\sigma$ una permutazione di $\{0,1,2\}$. Allora la trasformazione proiettiva tale che $T(U) = U$ e $T(V_i) = V_{\sigma(i)}$ per $i = 0,1,2$ è data dalla matrice
$$A = (V_{\sigma(0)}|V_{\sigma(1)}|V_{\sigma(2)})$$
ovvero la matrice che ha come prima colonna $V_{\sigma(0)}$ e così via.

4. Cerchiamo la trasformazione $T$ che porta il riferimento proiettivo canonico $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ in $[0,1,1]$, $[1,0,1]$, $[1,1,0]$, $[1,-1,1]$ ordinatamente. Per quanto detto, ci possiamo ridurre a cercare tra le trasformazioni associate alle matrici della forma
$$A^{h,k,j} = \begin{pmatrix} 0 & k & j \\ h & 0 & j \\ h & k & 0 \end{pmatrix}$$
quella che porta $[1,1,1]$ in $[1,-1,1]$. Si ha
$$A^{h,k,j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+j \\ h+j \\ h+k \end{pmatrix}$$
e dunque vogliamo che $[k+j, h+j, h+k] = [1,-1,1]$, da cui $k+j = h+k$, ovvero $j = h$, e $k+j = -h-j$, ovvero $k = -h-2j = -3h$. Quindi poniamo $[h,k,j] = [1,-3,1]$. Alla fine si ottiene
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sia $\ell : \{\alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$ una retta proiettiva e sia $T$ una proiettività, associata alla matrice $A$. Allora
$$T(\ell) = \{[x',y',z'] \mid T^{-1}([x',y',z']) \in \ell\} =$$
$$= \{[x',y',z'] \mid (\alpha,\beta,\gamma) \cdot A^{-1} \cdot (x',y',z')^T = 0\}$$
Possiamo riscrivere l'equazione come $(x',y',z') \cdot (A^{-1})^T \cdot (\alpha,\beta,\gamma)^T = 0$ e dunque porre $(\alpha',\beta',\gamma') = (A^{-1})^T \cdot (\alpha,\beta,\gamma)^T$, arrivando a dire che $T(\ell) = \ell'$ con
$$\ell' = \{[x',y',z'] \in \mathbb{P}^2 \mid (x',y',z') \cdot (\alpha',\beta',\gamma')$$

6. Sia $\ell : \{x + 2y + 3z = 0\}$; calcoliamone l'immagine tramite la proiettività trovata nell'esempio 4. Innanzitutto dobbiamo invertire la matrice $A$:
$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
Dunque, l'immagine di $\ell$ è la retta che ha come coefficienti la terna omogenea risultante da
$$[(1,2,3) \cdot A^{-1}] = [-4,-14,8] = [-2,-7,4]$$

Infatti $\ell \cap \ell_0 : [0, 3, -2]$ e $\ell \cap \ell_1 : [3, 0, -1]$ e dunque $T(\ell)$ passa per

$$T([0, -3, 2]) = [11, 2, 9] \qquad T([3, 0, -1]) = [-1, 2, 3]$$

ovvero avrà coefficienti $[-12, -42, 24] = [-2, -7, 4]$, come già ottenuto.

7. Sia $K$ un piano affine non per l'origine e sia $j_K : U_K \to K$ la carta affine associata; $K' = T(K)$ sarà ancora un piano affine non per l'origine e dunque avremo la carta affine associata $j_{K'} : U_{K'} \to K'$. Notiamo che, poichè una trasformazione lineare conserva il parallelismo, se $H$ è la giacitura di $K$, $H' = T(H)$ sarà la giacitura di $K'$ e si avrà

$$\{r' \in \mathbb{P}^2 \mid r' \not\subset H'\} = \tilde{T}(\{r \in \mathbb{P}^2 \mid T(r) \not\subset T(H)\}) = \tilde{T}(\{r \in \mathbb{P}^2 \mid r \not\subset H\})$$

ma $\{r \in \mathbb{P}^2 \mid r \not\subset H\} = U_K$, quindi $U_{T(K)} = \tilde{T}(U_K)$. O, con termini diversi, $\tilde{T}(\ell_K) = \ell_{T(K)}$. Inoltre, si consideri che

$$j_{K'}(r') = r' \cap K' = T(r) \cap T(H) = T(r \cap H) = T(j_K(r))$$

con $T(r) = r'$. E dunque $j_{T(K)} = T \circ j_K \circ \tilde{T}^{-1}$. Possiamo quindi leggere la trasformazione $\tilde{T}$ nella carta affine data da $K$ tramite la composizione $T_K = j_{K'} \circ \tilde{T} \circ j_K^{-1} : K \to K'$. Grazie a quanto appena dimostrato su $j_{K'}$, abbiamo che

$$T_K = j_{K'} \circ \tilde{T} \circ j_K^{-1} = T \circ j_K \circ \tilde{T}^{-1} \circ \tilde{T} \circ j_K^{-1} = T \circ j_K \circ I_{\mathbb{P}^2} \circ j_K^{-1} = T \circ I_K = T|_K$$

dove $I_X : X \to X$ è la funzione identica $I_X(x) = x$ sull'insieme $X$.

8. Sia $T$ una proiettività con associata la matrice $A$ e consideriamo la trasformazione $T_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $T_0 = j_0 \circ T \circ i_0$; si ha per ogni punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$T_0(u, v) = j_0(T([1, u, v])) = \left( \frac{a_{21} + a_{22}u + a_{23}v}{a_{11} + a_{12}u + a_{13}v}, \frac{a_{31} + a_{32}u + a_{33}v}{a_{11} + a_{12}u + a_{13}v} \right)$$

Tale trasformazione è definita fuori dalla retta $a_{11} + a_{12}u + a_{13}v = 0$, che da essa viene mandata "all'infinito". Nel caso particolare in cui $a_{12} = a_{13} = 0$, $T_0$ diventa una affinità del piano e non vi sono rette mandate all'infinito: infatti in tal caso la trasformazione proiettiva $T$ fissa la retta $\ell_0$ che è la retta all'infinito per la carta coordinata $j_0$. Risultati simili si possono ottenere anche per le carte coordinate $j_1, j_2$, ottenendo mappe $T_1, T_2$ definite sul piano meno una retta. Le trasformazioni $T_i$ si dicono trasformazioni lineari fratte.

9. Fissati quattro punti a 3 a 3 non allineati $A, B, C, D$, possiamo cambiare coordinate, utilizzando loro come riferimento proiettivo canonico, ovvero, se $M$ è la matrice associata alla proiettività $T$ che porta tali 4 punti nel riferimento canonico, un punto che ora ha coordinate $[x, y, z]$, avrà rispetto a $A, B, C, D$ coordinate date da

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se poi $A : [a_0, a_1, a_2]$, $B : [b_0, b_1, b_2]$ e così via, poiché

$$T^{-1}([1,0,0]) = A \quad T^{-1}([0,1,0]) = B \quad T^{-1}([1,1,0]) = C$$

$$T^{-1}([1,1,1]) = D$$

possiamo dire che

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} ha_0 & kb_0 & jc_0 \\ ha_1 & kb_1 & jc_1 \\ ha_2 & kb_2 & jc_2 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{cases} ha_0 + kb_0 + jc_0 &= d_0 \\ ha_1 + kb_1 + jc_1 &= d_1 \\ ha_2 + kb_2 + jc_2 &= d_2 \end{cases}$$

$M$ viene detta *matrice di cambio di riferimento*. In particolare, data una proiettività $S$ con associata matrice $B$, possiamo pensare di fissare due riferimenti proiettivi $A_1, A_2, A_3, A$ e $C_1, C_2, C_3, C$ e trascrivere la matrice associata rispetto a questi due, il primo in partenza e il secondo in arrivo. Ciò vuol dire che quando applichiamo la proiettività $S$ alla terna omogenea $[x, y, z]$, intendiamo che $[x, y, z]$ sono le coordinate di un certo punto rispetto a $A_1, A_2, A_3, A$ e interpretiamo la terna omogenea risultante come le coordinate di un punto rispetto a $C_1, C_2, C_3, C$. Quindi, preso un punto $[x, y, z]$, dovremo prima portarlo indietro dal riferimento $A_1, A_2, A_3, A$, trasformandolo in $M \cdot [x, y, z]^T$, dove $M$ è la matrice di cambio di riferimento per $A_1, A_2, A_3, A$; a questo punto potremo applicare $B$, ottenendo $B \cdot M \cdot [x, y, z]^T$ ed ora dovremo trasferire queste coordinate nel riferimento dato da $C_1, C_2, C_3, C$, tramite la matrice di cambio di riferimento per $C_1, C_2, C_3, C$, che chiamiamo $N$, ottenendo $N \cdot B \cdot M^{-1} \cdot [x, y, z]$. Si dice allora che, rispetto ai riferimenti $A_1, A_2, A_3, A$ e $C_1, C_2, C_3, C$, la proiettività $S$ ha matrice $N \cdot B \cdot M^{-1}$.

## Esercizi

1. Dimostrare che una proiettività con 4 punti fissi deve essere l'identità.

2. Sia $\ell_U : \{x + y + z = 0\}$; dimostrare che, comunque assegnate quattro rette a tre a tre non concorrenti, esiste un'unica proiettività che manda $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_U$ in esse ordinatamente.

3. Scrivere la matrice della trasformazione che fissa i primi tre punti del riferimento proiettivo canonico e manda $[1, 1, 1]$ in $[a, b, c]$, con $a, b, c \neq 0$.

4. Scrivere la matrice della trasformazione $T$ che è inversa di se stessa e soddisfa
$$T([1,0,0]) = [1,1,1] \qquad T([0,1,0]) = [0,0,1]$$

5. ($\star$) Trovare i punti fissi e le rette invarianti per la trasformazione associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Hint: considerare tutte le rette per i 4 punti del riferimento canonico e le loro intersezioni).

6. Trovare la o le proiettività (se esistono) $T$ che fissano le rette $\{x-y=0\}$ e $\{x+y+z=0\}$ e tali che $T([0,0,1]) = [1,1,0]$ e $T([1,0,-1]) = [0,1,-1]$.

7. Sia $H$ un piano per l'origine e sia $F$ un'isometria di $\mathbb{R}^3$ che porta il piano $H$ in $H_0$. Si consideri la mappa $\bar{j}_H = j_0 \circ F$, dove identifichiamo l'isometria e la proiettività indotta. Dato $K$ parallelo ad $H$ e distante 1, si dimostri che $\bar{j}_H \circ j_K^{-1}$ è un'isometria e stabilirne il legame con $F$. Sia ora $G$ una seconda isometria che porta $H$ in $H_1$ e sia $\bar{j}'_H = j_1 \circ G$; mostrare che $\bar{j}'_H \circ (\bar{j}_H)^{-1}$ è un'isometria[6] e chiarirne il legame con $F, G$.

8. Sia $T$ una proiettività con matrice $A$ in cui $a_{12}, a_{13} \neq 0$. Verificare che se due rette in $\mathbb{R}^2$ concorrono con $a_{11} + a_{12}u + a_{13} = 0$, allora le loro immagini tramite $T_0$ sono parallele.

9. Data nel piano euclideo la traslazione
$$F(u,v) = (u+1, v+2)$$
determinare la o le proiettività $T$ tali che $T_0 = F$.

10. Dimostrare che, fissati due qualunque quadrilateri non degeneri nel piano euclideo, esiste una proiettività $T$ tale che $T_0$ porta un quadrilatero nell'altro.

## 1.4 Rette in forma parametrica

Sia $\ell$ una retta proiettiva e siano su di lei $P, Q, R$ tre punti distinti; supponiamo che $P : [a,b,c]$ e $Q : [d,e,f]$, di modo che $R : [a+d, b+e, c+f]$. Ciò è sempre possibile: sia $m$ la retta affine che passa per i punti $(a,b,c)$ e $(d,e,f)$ e sia $r$ la retta che corrisponde al punto proiettivo $R$; consideriamo il punto $m \cap r$[7] che sarà della forma
$$\lambda(a,b,c) + (1-\lambda)(d,e,f)$$
Sostituendo $[a,b,c]$ con $[\lambda a, \lambda b, \lambda c]$ otteniamo sempre il punto $P$; similmente facciamo scrivendo $Q$ come $[(1-\lambda)d, (1-\lambda)e, (1-\lambda)f]$. In questo modo, la somma del rappresentante di $P$ e di quello di $Q$ produce un rappresentante di $R$.

Consideriamo ora la seguente mappa
$$\mathcal{L} : \mathbb{P}^1 \to \ell$$
definita da $\mathcal{L}([\mu,\nu]) = [\mu a + \nu d, \mu b + \nu e, \mu c + \nu f] = [\mu P +_R \nu Q]$, dove il simbolo $+_R$ vuole significare che prendiamo come addendi particolari terne rappresentati di $P$ e $Q$, scelte in modo che $[P +_R Q] = [R]$. Questa si chiama *parametrizzazione* della retta $\ell$; ad ogni punto di $\ell$ corrisponde un'unica coppia omogenea $[\mu,\nu]$ di $\mathbb{P}^1$ e viceversa.

[6] Verificando anche che sia definita su tutto il piano euclideo.

[7] Se $m \cap r = \emptyset$, basta sostituire $(a,b,c)$ con $(-a,-b,-c)$, che appartiene alla stessa terna omogenea, e ridefinire $m$ come passante per $(d,e,f)$ e $(-a,-b,-c)$. Così si dovrà avere $m \cap r \neq \emptyset$

Osserviamo che il riferimento canonico di $\mathbb{P}^1$ si trasforma, tramite $\mathcal{L}$ in $P, Q, R$. Quindi, quello che abbiamo fatto corrisponde essenzialmente a scegliere un riferimento proiettivo su $\ell$ e scrivere le coordinate dei suoi punti rispetto ad esso.

Date due rette in $\mathbb{P}^2$ e scelti tre punti $A, B, C$ sulla prima e tre punti $D, E, F$ sulla seconda, posso sempre trovare una (anzi, infinite) proiettività $T$ di modo che

$$T(A) = D \qquad T(B) = E \qquad T(C) = F$$

Basta dimostrarlo nel caso in cui $A, B, C$ siano $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[1, 1, 0]$; in tal caso, sia $P$ non allineato con $D, E, F$ e $Q$ sulla retta per $P$ e $F$, distinto da questi. Prendiamo come $T$ l'unica proiettività tale che

$$T([1, 0, 0]) = D \quad T([0, 1, 0]) = E \quad T([0, 0, 1]) = P \quad T([1, 1, 1]) = Q$$

Allora, detta $\ell$ la retta per $[0, 0, 1]$ e $[1, 1, 1]$, si ha $[1, 1, 0] = \ell \cap \ell_2$, ma dunque $T([1, 1, 0]) = T(\ell) \cap T(\ell_2)$ e $T(\ell_2)$ è proprio la retta per $D, E, F$, mentre $T(\ell)$ passa per $P, Q$ e dunque incontra l'altra in $F$.

Osserviamo che al variare di $P$ nel piano e di $Q$ sulla retta per $P$ ed $F$, la trasformazione $T$ cambia, pur continuando a soddisfare la richietsa di partenza.

Il risultato precedente diventa falso se si richiede di fissare l'immagine di 4 punti, tutti allineati. Infatti, si consideri l'applicazione $\mathcal{L} : \mathbb{P}^1 \to \ell_2$ associata ai punti $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [1, 1, 0]$. Siano ora $T, T'$ due delle trasformazioni che portano $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [1, 1, 0]$ in tre punti dati $D, E, F$; si avrà che $T \circ \mathcal{L} = T' \circ \mathcal{L}$ ed entrambe corrispondono alla parametrizzazione della retta per $D, E, F$ fatta a partire da questi tre punti come riferimento proiettivo. Dunque, supponiamo di sapere che vi sono un punto $P$ su $\ell_2$, un punto $Q$ sulla retta per $D, E, F$ e una trasformazione proiettiva $T$ di quelle dette che in più manda $P$ in $Q$; allora anche tutte le altre trasformazioni $T'$ che soddisfano le condizioni di cui sopra dovranno mandare $P$ in $Q$, in quanto il fatto che $T \circ \mathcal{L} = T' \circ \mathcal{L}$ si può interpretare dicendo che le restrizioni di $T$ e $T'$ a $\ell_2$ coincidono.

Sia dunque $[\mu, \nu, 0]$ un punto di $\ell_2$ e $Q = [\alpha D +_F \beta E]$ un punto di $D, E, F$; per quanto detto, $[\mu, \nu, 0] = \mathcal{L}([\mu, \nu])$ e $T \circ \mathcal{L}$ è una parametrizzazione della retta per $D, E, F$ rispetto a questi tre punti. Quindi $T([\mu, \nu, 0]) = Q$ se e solo se $Q = [\mu D +_F \nu E]$, ovvero se e solo se $[\alpha, \beta] = [\mu, \nu]$ cioè $\alpha\nu - \beta\mu = 0$. Si definisce dunque il *birapporto* di una quaterna ordinata di punti allineati $(X, Y, W, Z)$ come

$$(X; Y; W; Z) = \alpha/\beta \qquad \text{con } Z = [\alpha X +_W \beta Y]$$

Convenzionalmente, se $\beta = 0$, si pone $(X; Y; W; Z) = \infty$. Da quanto detto è evidente che due quaterne di punti allineati possono corrispondersi ordinatamente tramite una proiettività se e solo se hanno lo stesso birapporto. E' facile verificare che il birapporto è invariante per proiettività: per ogni proiettività $T$ si ha

$$(X; Y; W; Z) = (T(X); T(Y); T(W); T(Z))$$

Abbiamo dunque visto che, fissando una proiettività in 3 punti allineati, ne determiniamo il comportamento sulla retta che li contiene; del resto, è anche vero che, sapendo ad esempio che $T(A) = P$ e $T(B) = Q$, abbiamo comunque determinato l'immagine della retta per $A$ e $B$. Se non siamo direttamente interessati nel calcolo delle coordinate, ma vogliamo solo esprimere l'allineamento, può bastare il conoscere le coordinate di due soli punti; infatti, sapendo che $A : [a_0, a_1, a_2]$ e $B : [b_0, b_1, b_2]$, possiamo scrivere ogni altro punto sulla retta per essi come

$$P : [\mu(a_0, a_1, a_2) + \nu(b_0, b_1, b_2)]$$

oppure, possiamo dire che $P$ è allineato con $A, B$ se e solo se esistono due terne $(l, m, n)$ e $(p, q, r)$ tali che $A : [l, m, n]$, $B : [p, q, r]$ e $P : [l + p, m + q, n + r]$. Questo approccio è sottilmente diverso dal precedente, in quanto non crea una corrispondenza tra la retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ e quella per $A, B$, ma semplicemente fornisce un modo per scrivere tutti i punti su tale retta. Spesso, appunto quando non è necessario scrivere esplicitamente coordinate, è più comodo questo secondo approccio, nel quale si devono fissare meno punti; in tal caso è però più corretto (e fonte di meno errori) lavorare, invece che con i punti proiettivi, con vettori di $\mathbb{R}^3$ che rappresentano le terne omogenee dei punti in questione, come esemplificato nella dimostrazione del seguente risultato.

**Teorema 3 (Desargues)** *Siano $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ sei punti a 3 a 3 non allineati tali che $AD$, $BE$, $CF$ concorrono; allora i punti $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CA \cap FD$ sono allineati*

**Dim:** Scegliamo 6 vettori di $\mathbb{R}^3$ $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ di modo che $A = [a]$ e così via[8]. Sia $X$ l'intersezione di $AD$, $BE$, $CF$; esistono $\lambda_A$, $\lambda_D$, $\lambda_B$, $\lambda_E$, $\lambda_C$, $\lambda_F \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_A a + \lambda_D d = \lambda_B b + \lambda_E e = \lambda_C c + \lambda_F f = x$$

con $X = [x]$. Quindi

$$\lambda_A a - \lambda_B b = \lambda_E e - \lambda_D d$$

ma $[\lambda_A a - \lambda_B b]$ appartiene alla retta per $A$, $B$, mentre $[\lambda_E e - \lambda_D d]$ appartiene alla retta per $D$, $E$ e dunque, poichè coincidono, entrambi indicano il punto $P = AB \cap DE$. Per lo stesso ragionamento

$$\lambda_B b - \lambda_C c = \lambda_F f - \lambda_E e$$

rappresentano entrambi il punto $Q = BC \cap EF$. Infine, notiamo che

$$(\lambda_A a - \lambda_B b) + (\lambda_B b - \lambda_C c) = (\lambda_E e - \lambda_D d) + (\lambda_F f - \lambda_E e)$$

rappresenta un punto sulla retta $PQ$, ma svolgendo i calcoli vediamo che tale punto può essere scritto come

$$\lambda_A a - \lambda_C c = \lambda_F f - \lambda_D d$$

ovvero come l'intersezione tra $AC$ e $DF$, ovvero $R$. Questo quindi dimostra che $P$, $Q$, $R$ sono allineati. $\square$

## Esempi

1. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{P}^1 \to \ell_2$ tale che $\mathcal{L}([1, 0]) = [1, 1, 0] = P$, $\mathcal{L}([0, 1]) = [1, 2, 0] = Q$ e $\mathcal{L}([1, 1]) = [1, 3, 0] = R$. Vogliamo determinare le coordinate del punto $\mathcal{L}([\mu, \nu]) = [\mu P +_R \nu Q]$. Per far ciò dobbiamo trovare rappresentati per

[8] Ciò vuol dire che, se $a = (a_1, a_2, a_3)$, allora $A = [a_1, a_2, a_3]$; ovviamente $A = [a] = [k \cdot a]$ per ogni $k \in \mathbb{R}^*$.

$P$ e $Q$ che sommati diano un rappresentante di $R$; osserviamo che, in $\mathbb{R}^3$ i punti $(1,1,0),(1,2,0),(1,3,0)$ sono allineati e dunque ci basta risolvere l'equazione

$$\lambda(1,1,0)+(1-\lambda)(1,2,0)=(1,3,0)$$

che si riduce a $\lambda+2(1-\lambda)=3$, da cui $\lambda=-1$. Per cui possiamo scrivere

$$P:[-1,-1,0] \qquad Q:[2,4,0] \qquad R:[2-1,4-1,0+0]=[1,3,0]$$

Dunque $\mathcal{L}([\mu,\nu])=[\mu P+_R \nu Q]=[-\mu+2\nu,-\mu+4\nu,0]$.

2. Siano $T, T'$ due proiettività del piano, che portano la retta $\ell_2$ in una retta $\ell$ di modo che

$$T([1,0,0])=T'([1,0,0]) \qquad T([0,1,0])=T'([0,1,0])$$

$$T([1,1,0])=T'([1,1,0])$$

Allora $S=T^{-1}\circ T'$ è una proiettività che fissa ogni punto della retta $\ell_2$ (non ha dunque solo una retta invariante, ma una retta di punti fissi). In particolare $S([1,0,0])=[1,0,0]$ e similmente per $[0,1,0]$ e $[1,1,0]$; dunque, se $A$ è la matrice associata ad $S$,

$$A=\begin{pmatrix} h & 0 & a \\ 0 & h & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Siano ora $T, T'$ ottenute come si è descritto sopra, fissando l'immagine di $[0,0,1]$ in un punto $P$ non su $\ell$ e l'immagine di $[1,1,1]$ in un punto $Q$ sulla retta da $P$ a $T([1,1,0])$; siano $P, Q$ i punti utilizzati per $T$ e $P', Q'$ quelli utilizzati per $T'$. Si supponga che $P=P'$ e dunque $T^{-1}(T'([0,0,1]))=T^{-1}(P')=T^{-1}(P)=[0,0,1]$; in tale ipotesi aggiuntiva, la matrice diventa

$$A=\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Ora, sia $R=T([1,1,0])=T'([1,1,0])$ e supponiamo che $Q'=[\mu P+_R \nu Q]$; allora, applicando $T^{-1}$ a questa configurazione, avremo che $T^{-1}$ darà una parametrizzazione della retta per $[0,0,1]$, $[1,1,1]$, $[1,1,0]$ riferita a questa terna (immagine sotto $T^{-1}$ della terna $P, Q, R$ a cui è riferita la parametrizzazione in partenza); dunque, dobbiamo scegliere rappresentanti per $[0,0,1]$ e $[1,1,1]$ di modo che sommati diano un rappresentante per $[1,1,0]$ e prendiamo quindi le terne $(0,0,-1),(1,1,1)$. Quindi

$$S([1,1,1])=T^{-1}(Q')=[\mu(0,0,-1)+\nu(1,1,1)]=[\nu,\nu,\nu-\mu]$$

e dunque si dovrà avere $[h,k]=[\nu,\nu-\mu]$ ed essendo $Q'$ distinto da $P$ e da $Q$ (altrimenti $T=T'$), possiamo considerare il numero $j=(P;Q;R;Q')=\mu/\nu$ e scrivere

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-j \end{pmatrix}$$

3. Sia $\mathfrak{F}_P$ l'insieme delle rette proiettive che passano per $P$; esso è detto *fascio di rette di centro* $P$. Consideriamo due rette di $\mathfrak{F}_P$, $\ell, \ell'$; allora per ogni terza retta $\ell''$ possiamo scegliere rappresentanti $(\alpha, \beta, \gamma)$ e $(\alpha', \beta', \gamma')$ per i coefficienti di $\ell, \ell'$ di modo che i coefficienti di $\ell''$ siano dati da

$$[\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma']$$

In tal modo si può definire $\mathcal{F} : \mathbb{P}^1 \to \mathfrak{F}_P$ come

$$\mathcal{F}([\mu, \nu]) = \{(\mu\alpha + \nu\alpha')x + (\mu\beta + \nu\beta')y + (\mu\gamma + \nu\gamma')z = 0\}$$

Tale costruzione ricalca esattamente quella della parametrizzazione di una retta ed infatti la mappa $\mathcal{F}$ si dice *parametrizzazione* del fascio $\mathfrak{F}_P$; le rette $\ell, \ell'$ vengono dette *generatori*[9].

4. Siano $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ i fasci di centro $V_0 : [1, 0, 0]$, $V_1 : [0, 1, 0]$, $V_2 : [0, 0, 1]$; siano $\ell_U : \{x + y + z = 0\}$, $\ell_V : x + y - z = 0$ e si indichi con $\ell(P, Q)$ la retta per $P$ e $Q$. Definiamo $f : \mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{F}_1$ come segue: sia $\ell \in \mathfrak{F}_0$; sia $P = \ell \cap \ell_U$ e sia $\ell' \in \mathfrak{F}_1$ tale che $\ell' = \ell(P, V_2)$; sia poi $Q = \ell' \cap \ell_V$ e sia infine $f(\ell) \in \mathfrak{F}_2$ tale che $f(\ell) = \ell(V_1, Q)$. Consideriamo due parametrizzazioni $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ dei due fasci di centri $V_0, V_1$; allora possiamo definire l'applicazione

$$F = \mathcal{F}_1^{-1} \circ f \circ \mathcal{F}_0 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

Dimostreremo che essa è una proiettività di $\mathbb{P}^1$. Cominciamo con il calcolare esplicitamente $f$, ponendo $\ell : \{\beta y + \gamma z = 0\}$ la generica retta di $\mathfrak{F}_0$. Allora $\ell \cap \ell_U$ è il punto $[\beta - \gamma, \gamma, -\beta]$; di conseguenza la retta per esso e $V_2$ è $\{\gamma x + (\gamma - \beta)y = 0\}$, la cui intersezione con $\ell_V$ è $[\gamma - \beta, -\gamma, -\beta]$. La retta che passa per tale punto e per $[0, 1, 0]$ è $f(\ell)$ ed ha equazione

$$\beta x + (\gamma - \beta)z = 0$$

Sia ora $A_i$ la matrice associata alla trasformazione $S_i$ di $\mathbb{P}^1$ tale che

$$S_0(\mathcal{F}_0^{-1}(\ell_1)) = [1, 0] \quad S_0(\mathcal{F}_0^{-1}(\ell_2)) = [0, 1] \quad S_0(\mathcal{F}_0^{-1}(\{y+z = 0\})) = [1, 1]$$

$$S_1(\mathcal{F}_1^{-1}(\ell_0)) = [1, 0] \quad S_1(\mathcal{F}_1^{-1}(\ell_2)) = [0, 1] \quad S_1(\mathcal{F}_1^{-1}(\{x+z = 0\})) = [1, 1]$$

Ovviamente si ha che $S = S_1 \circ \mathcal{F}_1^{-1} \circ f \circ \mathcal{F}_0 \circ S_0^{-1}$ è tale che

$$\begin{aligned} S([\mu, \nu]) &= S_1 \circ \mathcal{F}_1^{-1} \circ f \circ \mathcal{F}_0 \circ S_0^{-1}([\mu, \nu]) \\ &= S_1 \circ \mathcal{F}_1^{-1} \circ f \circ \mathcal{F}_0(F_0^{-1}([\mu\ell_1 +_{\{y+z=0\}} \nu\ell_2]) \\ &= S_1 \circ \mathcal{F}_1^{-1} \circ f(\{\mu y + \nu z = 0\}) \\ &= S_1 \circ \mathcal{F}_1^{-1}(\{\mu x + (\nu - \mu)z = 0\}) \\ &= S_1(\mu F_1^{-1}(\ell_0) +_{F_1^{-1}(\{x+z=0\})} \nu F_1^{-1}(\ell_2)) \\ &= [\mu, \nu - \mu] \end{aligned}$$

e dunque la matrice associata ad $S$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $S$ è una proiettività di $\mathbb{P}^1$ e, di conseguenza, $F = S_1^{-1} \circ S \circ S_0$ è anch'essa una proiettività e ha matrice $A_1^{-1} A A_0$.

[9] Di solito ci si dimentica della retta $\ell''$ che viene, raramente, chiamata *unità*

5. E' possibile riscrivere la dimostrazione del teorema di Desargues senza passare esplicitamente ad utilizzare i vettori; fissiamo delle coordinate per i 6 punti: $A : [a_0, a_1, a_2]$ e così via. Scegliamo, per la retta $AD$, la parametrizzazione associata a $A, D, [a_0 + d_0, a_1 + d_1, a_2 + d_2]$ e similmente con le altre rette in gioco ($BE$, $CF$, $AB$, $BC$, $CA$, $DE$, $EF$, $FD$); allora avremo che $X = [\lambda_A A + \lambda_D D]$ (dove la somma è sempre intesa rispetto alle parametrizzazioni fissate) ma anche $X = [\lambda_B B + \lambda_E E]$ e $X = [\lambda_C C + \lambda_F F]$. In questo modo si può ripetere la dimostrazione esattamente come è stata svolta sopra, solo parlando dei punti al posto dei vettori.

6. Siano $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ cinque punti allineati e tali che

$$(A; B; C; D) = (A; B; C; E)$$

Allora esiste una proiettività che porta $A, B, C, D$ in $A, B, C, E$, ma poiché tutte le proiettività che portano $A, B, C$ in $A, B, C$ coincidono sulla retta che passa per essi (e sono l'identità su di essa), si ha $D = E$. Inoltre, se rispetto ad un qualche punto $R$ della retta si ha $C = \alpha A +_R \beta B$ e $D = \gamma A +_R \delta B$, allora posso definire una proiettività $T$ che porti $\ell(A, B)$ in $\ell_2$ e tale che $T(A) = [1, 0, 0]$, $T(B) = [0, 1, 0]$, $T(C) = [1, 1, 0]$; allora, poste $\mathcal{L}$ la parametrizzazione rispetto a $A, B, R$ e $\ell'$ quella rispetto a $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 1, 0]$, la matrice associata alla proiettività di $\mathbb{P}^1$ data da $\mathcal{L}'^{-1} \circ T \circ \mathcal{L}$ sarà

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\mathcal{L}'^{-1} \circ T(D) = \mathcal{L}'^{-1} \circ T \circ \mathcal{L}([\gamma, \delta]) = [\gamma/\alpha, \delta/\beta]$$

e dunque $(A; B; C; D) = (T(A); T(B); T(C); T(D)) = \dfrac{\gamma\beta}{\alpha\delta}$.

## Esercizi

1. Calcolare la matrice $A$ associata alla proiettività $S = T^{-1} \circ T'$ con $T$ e $T'$ proiettività che mandano la retta $\ell_2$ nella retta $\ell$, di modo che

$$T([1, 0, 0]) = T'([1, 0, 0]) \qquad T([0, 1, 0]) = T'([0, 1, 0])$$

$$T([1, 1, 0]) = T'([1, 1, 0])$$

entrambe della forma descritta nel testo, $T$ a partire da $P$ e $Q$, $T'$ a partire da $P'$ e $Q'$, con $P \neq P'$, $Q \neq Q'$.

2. Confrontare la matrice ottenuta nell'esercizio precedente con la prima trovata nell'esempio 2 e dedurne che le proiettività $T$ per cui sia assegnata l'immagine di $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[1, 1, 0]$ si ottengono tutte dalla costruzione del testo a partire da coppie di punti $P, Q$ e se inoltre $(P, Q) \neq (P', Q')$ le trasformazioni ottenute sono distinte.

3. Fissate due parametrizzazioni $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ della retta $\ell$ legate a due diverse terne di punti su di essa, dimostrare che $\mathcal{L}_1^{-1} \circ \mathcal{L}^2$ è una proiettività di $\mathbb{P}^1$.

4. Fissate due rette $\ell, \ell'$ e su di esse due riferimenti proiettivi $A, B, C$ e $D, E, F$, avremo due parametrizzazioni ad essi associate:

$$\mathcal{L} : \mathbb{P}^1 \to \ell \qquad \mathcal{L}' : \mathbb{P}^1 \to \ell'$$

   Data una proiettività $T$ con matrice associata $A$ che porta $\ell$ in $\ell'$, determinare la matrice $(2 \times 2)$ associata alla proiettività

$$\mathcal{L}'^{-1} \circ T \circ \mathcal{L} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

5. Siano $\ell, \ell'$ due rette e sia $P$ un punto non su di esse; per ogni punto $Q \in \ell$, sia $\ell_Q$ la retta per $Q, P$ e sia $f(Q) = \ell_Q \cap \ell'$. Tale $f : \ell \to \ell'$ si dice *prospettività*. Date due parametrizzazioni $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ di $\ell, \ell'$, si dimostri che

$$\mathcal{L}'^{-1} \circ f \circ \mathcal{L} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

   è una proiettività, scrivendone la matrice associata.

6. E' vero che ogni proiettività tra due rette $\ell, \ell'$[10] è una prospettività?

7. Dimostrare che, dati 6 punti $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ tali che $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CA \cap FD$ sono allineati, si ha che $AD$, $BE$, $CF$ concorrono.

8. Dati quattro punti allineati $A$, $B$, $C$, $D$ e data una parametrizzazione $\mathcal{L}$ della retta che li contiene, di modo che

$$\mathcal{L}([a_0, a_1]) = A \quad \mathcal{L}([b_0, b_1]) = B \quad \mathcal{L}([c_0, c_1]) = C \quad \mathcal{L}([d_0, d_1]) = D$$

   determinare il birapporto $(A; B; C; D)$.

9. Sapendo che $(A; B; C; D) = j$, scrivere $(\sigma(A); \sigma(B); \sigma(C); \sigma(D))$ per ogni permutazione $\sigma$ dell'insieme $\{A, B, C, D\}$.

10. Date due rette $r$, $s$ concorrenti in $P$, dati $A$, $B$, $C$ su $r$ e $D$, $E$, $F$ su $s$, dimostrare che, se $(P; A; B; C) = (P; D; E; F)$, allora $AD$, $BE$, $CF$ concorrono.

11. E' possibile definire il birapporto tra quattro rette concorrenti come segue: siano $\ell_i$ per $i = 1, \ldots, 4$ rette concorrenti in $P$; sia $\ell$ una quinta retta non per $P$. Poniamo $A_i = \ell_i \cap \ell$ e definiamo

$$(\ell_1; \ell_2; \ell_3; \ell_4) = (A_1; A_2; A_3; A_4)$$

    Dimostrare che tale definizione è ben posta, ovvero che se $\ell'$ è un'altra retta non per $P$, posti $B_i = \ell' \cap \ell_i$, allora

$$(A_1; A_2; A_3; A_4) = (B_1; B_2; B_3; B_4)$$

[10] Diremo proiettività tra $\ell, \ell'$ una trasformazione $f : \ell \to \ell'$ tale che $\mathcal{L}'^{-1} \circ f \circ \mathcal{L}$ sia una proiettività di $\mathbb{P}^1$.

## 1.5 Dualità

Riscriviamo gli assiomi di intersezione dati all'inizio di queste note in maniera più simmetrica:

I1 per ogni coppia di punti esiste una retta che li contiene entrambi;

I2 per ogni coppia di rette esiste un punto che appartiene ad entrambe.

Si nota immediatamente che scambiando i termini *retta* e *punto* ed i concetti *appartenenza* e *contenimento*, i due assiomi si scambiano, fornendo però in definitiva lo stesso insieme di assiomi.

Questa osservazione sta alla base di una delle caratteristiche più singolari della geometria proiettiva, ovvero la dualità tra punti e rette. Mostreremo in questa sezione che scambiando come sopra detto rette e punti, appartenenze e contenimenti nel testo di un teorema si ottiene un secondo teorema (detto *duale* del primo) anch'esso vero.

Diciamo ${\mathbb{P}^2}^*$ l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^2$; dunque, possiamo identificare ${\mathbb{P}^2}^*$ con l'insieme dei piani per l'origine di $\mathbb{R}^3$ (che sono appunto le rette di $\mathbb{P}^2$). Mostriamo innanzitutto che esso ha una struttura di piano proiettivo, prendendo come rette in ${\mathbb{P}^2}^*$ i fasci di rette di $\mathbb{P}^2$; una retta di ${\mathbb{P}^2}^*$ è per l'appunto un insieme di punti di ${\mathbb{P}^2}^*$, ma tali punti non sono altro che rette di $\mathbb{P}^2$ e dunque la definizione appena data ha senso[11].

Notiamo a questo punto che i fasci di rette sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano proiettivo, grazie alla mappa che associa ad ogni fascio il suo centro; quindi possiamo dire che una retta di ${\mathbb{P}^2}^*$ è un punto di $\mathbb{P}^2$, sottintendendo questa identificazione tra un fascio e il suo centro. Osserviamo però che tale identificazione può essere vista come segue

$$\mathfrak{F} \mapsto \bigcap_{\ell \in \mathfrak{F}} \ell$$

Dunque, abbiamo visto che ${\mathbb{P}^2}^*$ ha una struttura di piano proiettivo in cui i punti sono le rette di $\mathbb{P}^2$ e le rette sono i fasci di $\mathbb{P}^2$. Abbiamo anche visto come i fasci e i punti di $\mathbb{P}^2$ si corrispondano. Tale corrispondenza rispetta inoltre le operazioni di unione e intersezione, nel senso che ora preciseremo:

$$\ell(P,Q) = \mathfrak{F}_P \cap \mathfrak{F}_Q$$

$$\mathfrak{F}_{\ell \cap \ell'} = \mathfrak{F}(\ell, \ell')$$

D'ora in poi, dunque, parleremo di punti invece che di fasci e applicheremo le regole sopra enunciate senza più fare esplicito riferimento all'identificazione tra un fascio e il suo centro.

Per quanto detto finora, possiamo definire una mappa

$$\mathcal{D} : \mathbb{P}^2 \to {\mathbb{P}^2}^*$$

che faccia corrispondere ad ogni punto una retta e ad ogni retta un punto di modo che

$$\mathcal{D}(\ell(P,Q)) = \mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D}(Q)$$

[11] Anche se può suonare un po' confusa.

$$\mathcal{D}(\ell \cap \ell') = \ell(\mathcal{D}(\ell), \mathcal{D}(\ell'))$$

Tale mappa viene detta applicazione di *dualità*.

Notiamo che, ricordando l'identificazione di un fascio con il suo centro e la conseguente inversione tra unione e intersezione, una tale mappa non è altro che la solita proiettività[12] e dunque, fissati un riferimento proiettivo $V_0, V_1, V_2, U$ in $\mathbb{P}^2$ ed un riferimento proiettivo $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_U$ in $\mathbb{P}^{2^*}$, potremo scriverla come una matrice che porta la terna omogenea delle coordinate di un punto nella terna omogenea dei coefficienti di una retta. Avremo quindi

$$[p_0, p_1, p_2] \mapsto \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : \ [p_0,\ p_1,\ p_2] \cdot \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Ovvero

$$P \mapsto \{P^T \cdot A \cdot X = 0\}$$

Affinché tale trasformazione sia una proiettività serve ed è sufficiente che la matrice $A$ sia invertibile; dunque possiamo, ad esempio, scegliere $A = I$ ed avremo che l'applicazion di dualità associata è semplicemente

$$[a, b, c] \mapsto \{ax + by + cz = 0\}$$

Sappiamo già, dalle precedenti sessioni, che la retta per i punti $[a, b, c]$ e $[d, e, f]$ ha coefficienti $[bf-ec, dc-af, ae-db]$ e, d'altra parte, il punto di intersezione tra le rette con coefficienti $[a, b, c]$ e $[d, e, f]$ ha coordinate $[bf-ec, dc-af, ae-db]$. Dunque l'applicazione che semplicemente interpreta le coordinate di un punto come i coefficienti di una retta e viceversa rispetta le proprietà dell'applicazione di dualità; del resto, come abbiamo appena visto, ne è un caso particolare, associato alla matrice $I$.

Abbiamo così mostrato che esiste una corrispondenza di dualità (anzi, ve ne sono infinite) e ne abbiamo fornito un esempio esplicito. Grazie alle proprietà sopra elencate, possiamo concludere che tale mappa opera come abbiamo descritto all'inizio della sezione e trasforma enunciati veri in enunciati veri. Spesso non sarà necessario scrivere esplicitamente la dualità in coordinate, ma l'aver prodotto una tale scrittura ci assicura l'esistenza di tale mappa. Vediamone un'immediata applicazione.

**Teorema 4 (Desargues)** *Se 6 punti $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ a tre a tre non allineati sono tali che $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CA \cap FD$ sono allineati, allora $AD$, $BE$, $CF$ concorrono.*

**Dim:** Dualizziamo l'enunciato. Otteniamo 6 rette $\ell_A$, $\ell_B$ e così via a tre a tre non concorrenti (duale dell'allineamento); ora, la retta $AB$ avrà come duale il punto $L = \ell_A \cap \ell_B$, mentre la retta $DE$ avrà come duale il punto $S = \ell_D \cap \ell_E$ e dunque $P$ avrà come duale la retta $\ell_P = \ell(L, S)$. Similmente, saranno $M = \ell_B \cap \ell_C$ e $T = \ell_E \cap \ell_F$ i duali di $BC$ e $EF$, $N = \ell_C \cap \ell_A$ e $U = \ell_F \cap \ell_D$ i duali di $CA$ e $DF$. Quindi l'ipotesi è che $\ell(L, S)$, $\ell(M, T)$, $\ell(N, U)$ concorrono. Similmente la tesi si trasforma in $\ell_A \cap \ell_D$, $\ell_B \cap \ell_E$, $\ell_C \cap \ell_F$ allineati. Notiamo che fissare le sei rette a tre a tre non concorrenti equivale a fissare i sei punti $L, M, N, S, T, U$.

[12] Tale fatto è tutt'altro che banale, ma non ne diamo qui la dimostrazione.

Riscrivendo tutto, otteniamo 6 punti $L$, $M$, $N$, $S$, $T$, $U$ tali che $LS$, $MT$, $NU$ concorrono; vogliamo dimostrare che $LN \cap SU$, $ML \cap TS$, $MN \cap TU$ sono allineati. Questo è però il teorema di Desargues precedentemente dimostrato. Dunque, questa seconda proposizione (implicazione inversa del teorema di Desargues) è vera in quanto duale della prima, che abbiamo già dimostrato. □

## Esempi

1. Sia $\mathcal{D}$ una dualità associata alla matrice $M$; la retta $\ell : \{ax + by + cz = 0\}$ va tramite $\mathcal{D}$ nell'intersezione delle rette $\mathcal{D}(P)$ per $P \in \ell$. Ovvero, dato $P : [p_0, p_1, p_2]$ tale che $ap_0 + bp_1 + cp_2 = 0$, otteniamo la retta $\{P^T \cdot M \cdot X = 0\}$; vogliamo trovare una soluzione comune a tutte queste equazioni al variare di $P$ tra i punti con la proprietà descritta. Poniamo $R : [a, b, c]$ e scegliamo $Q = M^{-1} \cdot R$, allora si ha
$$P^T \cdot M \cdot Q = P^T \cdot M \cdot M^{-1} \cdot R = P^T \cdot R = ap_0 + bp_1 + cp_2 = 0$$
dunque $Q$ è la soluzione comune a tutte le equazioni (sappiamo che è unica nelle terne omogenee e ne abbiamo trovata una). Dunque, se tramite $\mathcal{D}$ il punto $P$ va nella retta $\{P^T \cdot M \cdot X = 0\}$, allora la retta $\{R^T \cdot X = 0\}$ va nel punto $M^{-1} \cdot R$.

2. Abbiamo mostrato come le rette del piano proiettivo abbiano a loro volta una struttura di piano proiettivo; questo rimane vero in dimensione maggiore se invece delle rette si considerano gli oggetti di dimensione massima (piani in 3 dimensioni, iperpiani in 4 e così via), in quanto per essi si possono ripetere i ragionamenti fatti. Ad esempio, in dimensione 3, potremo definire una struttura di spazio proiettivo sull'insieme dei piani di $\mathbb{P}^3$, che indicheremo con $\mathbb{P}^{3^*}$, chiamando piani gli insiemi
$$\pi_Q = \{\pi \in \mathbb{P}^{3^*} | Q \in \pi\}$$
e chiamando rette gli insiemi
$$\ell_{\ell'} = \{\pi \in \mathbb{P}^{3^*} | \ell' \subset \pi\}$$
ovvero i fasci di piani che hanno come centri punti e rette. Invece non è possibile ripetere simili discorsi con, ad esempio, le rette dello spazio proiettivo, che formano un insieme abbastanza complicato da descrivere.[13]

3. Consideriamo la dualità data dalla matrice identità. In $\mathbb{R}^3$, essa porta la retta data dai multipli del vettore $(a, b, c)$ nel piano $ax + by + cz = 0$; è facile accorgersi che tali oggetti sono tra loro perpendicolari. Dunque la particolare dualità indotta dalla matrice identità può essere vista come il passaggio al proiettivo della mappa
$$V \mapsto V^\perp$$
che porta ogni sottospazio per l'origine nel suo ortogonale. Tale mappa rispetta le proprietà di intersezione e unione, rovesciandole, esattamente come la dualità.

[13] Tale insieme, nel caso in cui i coefficienti delle terne omogenee vengano presi complessi, si dice *quadrica di Klein* ed è una delle superfici complesse più studiate.

4. Ovviamente, l'intero procedimento può essere ripetuto su $\mathbb{P}^1$ o su $\mathbb{P}^3$, prestando però attenzione a cosa è la soluzione di un'equazione lineare omogenea in ciascuno di questi due oggetti. In $\mathbb{P}^1$, con 2 coordinate omogenee, il punto $[a,b]$ andrà, tramite la dualità indotta dalla matrice $M=(m_{ij})$, nel luogo
$$\{(a,b)^T\cdot M\cdot(x,y)=0\}=\{(am_{11}+bm_{21})x+(am_{12}+bm_{22})y=0\}$$
ovvero nel punto $[-am_{12}-bm_{22}, am_{11}+bm_{21}]$. In $\mathbb{P}^3$, invece, il luogo di zeri di un'equazione lineare è un piano proiettivo e dunque i punti vengono mandati, per dualità, nei piani; per le proprietà di intersezione della mappa di dualità, le rette vengono mandate nelle rette, infatti se $P,Q\in\mathbb{P}^3$ sono due punti distinti, si ha che
$$\mathcal{D}(P)\cap\mathcal{D}(Q)=\mathcal{D}(\ell(P,Q))$$
ma $\mathcal{D}(P)$ e $\mathcal{D}(Q)$ sono piani e dunque si intersecano in una retta.
5. Consideriamo l'applicazione di dualità $\mathcal{D}$ data da
$$[a,b,c]\mapsto\{ax+by-cz=0\}$$
e studiamo l'applicazione $J=j_2\circ\mathcal{D}\circ i_2:\mathbb{R}^2\to\{\text{rette di }\mathbb{R}^2\}$. Sia dunque $(u,v)$ un punto del piano; allora
$$J(u,v)=j_2\circ\mathcal{D}([u,v,1])=j_2(\{ux+vy-z=0\})=\{ux+vy=1\}$$
Tale retta è perpendicolare alla congiungente di $(u,v)$ con l'origine, che ha equazione $\{vx=uy\}$, e la incontra in $\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right)$ che è l'inverso circolare del punto $(u,v)$ rispetto alla circonferenza unitaria.
6. Vediamo ora di studiare, data un'applicazione di dualità $\mathcal{D}$, i punti che appartengono alla propria retta duale. Ovvero l'insieme
$$F=\{P\in\mathbb{P}^2|P\in\mathcal{D}(P)\}$$
Sia dunque $M$ la matrice associata a $\mathcal{D}$; allora possiamo descrivere l'insieme $F$ come $\{P|P^T\cdot M\cdot P=0\}$ ovvero, se $M=(m_{ij})$ e $P:[x,y,z]$, allora cerchiamo i punti $[x,y,z]$ che risolvono
$$(m_{11}x+m_{21}y+m_{31}z, m_{12}x+m_{22}y+m_{32}z, m_{31}x+m_{32}y+m_{33}z)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$
ovvero
$$m_{11}x^2+m_{22}y^2+m_{33}z^2+xy(m_{12}+m_{21})+yz(m_{23}+m_{32})+zx(m_{31}+m_{13})=0$$
Vedremo più avanti che il luogo di zeri di tale polinomio è la generica conica proiettiva; per ora, supponiamo che $m_{11}=m_{22}=-m_{33}$ e $m_{ij}=0$ se $i\neq j$, allora avremo
$$F=\{x^2+y^2-z^2=0\}$$
e, utilizzando un precedente esercizio, sappiamo che $j_2(F)=\{u^2+v^2=1\}$, ovvero la circonferenza unitaria; vediamo quindi, applicando l'esempio precedente, che i punti della circonferenza unitaria vanno, tramite $j_2\circ F\circ i_2$, nella retta per loro che tange la circonferenza.

7. Sia $\mathcal{D}$ la dualità associata alla matrice identità e sia $\mathcal{D}'$ la dualità introdotta nell'esempio 5. Allora
$$\mathcal{D}' \circ \mathcal{D} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$$
è data da $[a, b, c] \mapsto [a, b, -c]$ e dunque è una proiettività. Questo indica che non importa quale dualità si usa, se la configurazione che si vuole studiare è invariante per proiettività.

## Esercizi

1. Date una proiettività $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ e una dualità $\mathcal{D} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^{2^*}$, definire la proiettività duale $T^* : \mathbb{P}^{2^*} \to \mathbb{P}^{2^*}$ e determinare la matrice ad essa associata, data le matrice di $T$; definendo poi una nuova dualità $T_\sharp\mathcal{D}$ con l'espressione
$$T_\sharp\mathcal{D}(P) = T^*(\mathcal{D}(T^{-1}(P)))$$
determinare la matrice di $T_\sharp\mathcal{D}$, conoscendo le matrici di $T$ e di $\mathcal{D}$.

2. Data la dualità $\mathcal{D}$ su $\mathbb{P}^3$ descritta da
$$\mathcal{D}([a, b, c, d]) = \{ax + by + cz + dw = 0\}$$
e definito, come prima, $F = \{P \in \mathbb{P}^3 | P \in \mathcal{D}(P)\}$, determinare $j_3(F)$; esplicitare inoltre la trasformazione $J : \mathbb{R}^3 \to \{$ piani di $\mathbb{R}^3\}$ data da $J = j_3 \circ \mathcal{D} \circ i_3$.

3. Sia dato un poliedro regolare (convesso) in $\mathbb{R}^3$, tale che i suoi spigoli siano tutti tangenti alla sfera unitaria (ovvero, che abbia la sfera unitaria come *intersfera*). Detto $\mathcal{F}$ l'insieme dei piani definiti dalle faccie del poliedro, determinare quale poliedro è determinato dall'inviluppo convesso di $J^{-1}(\mathcal{F})$ e dimostrare che anche esso ammette la sfera unitaria come intersfera.

4. Determinare una condizione necessaria e sufficiente sulla matrice associata alla dualità $\mathcal{D}$ di modo che
$$P \in \mathcal{D}(Q) \Leftrightarrow Q \in \mathcal{D}(P)$$
per ogni due punti $P,\ Q \in \mathbb{P}^2$.

5. Dimostrare che la composizione di due dualità (che è quindi una trasformazione che manda punti in punti) è una proiettività.

6. Esiste una dualità per cui l'insieme $F = \{P \in \mathbb{P}^2 | P \in \mathcal{D}(P)\}$ è una retta? E una per cui $F = \mathbb{P}^2$?[14]

7. Dimostrare che
$$(A, B, C, D) = (\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(B), \mathcal{D}(C), \mathcal{D}(D))$$
per ogni quaterna di punti allineati $A,\ B,\ C,\ D$.

[14]Una dualità deve sempre essere associata ad una matrice *invertibile*...

8. Determinare tutte le matrici simmetriche associate a dualità tali che

$$\mathcal{D}([0,1,1]) = \{y + z - x = 0\} \qquad \mathcal{D}([1,1,0]) = \{x + y - z = 0\}$$

e calcolare $\mathcal{D}([1,0,1])$.

9. Sia $\mathcal{D}$ una dualità con matrice associata $M$; siano $A, B, C, D$ quattro punti a tre a tre non allineati. Sia $B$ la matrice della proiettività che porta $A, B, C, D$ ad essere il riferimento proiettivo canonico; tale cambio di riferimento ne induce uno su $\mathbb{P}^{2^*}$ in maniera ovvia. Determinare la matrice associata a $\mathcal{D}$ rispetto a questi nuovi riferimenti proiettivi.

10. Sia $\mathcal{D}$ una dualità e siano $A_1, A_2, A_3$ tre punti tali che

$$\mathcal{D}(A_i) = \ell(A_j, A_k)$$

con $i, j, k$ che varia tra le permutazione di $1, 2, 3$. Dimostrare che la matrice associata a $\mathcal{D}$ nel riferimento proiettivo $A_1, A_2, A_3, B$ è diagonale, per ogni $B$ che forma un riferimento proiettivo con i precedenti tre.

## 1.6 Legame con la geometria affine

Come abbiamo visto all'inizio di queste note, l'usuale piano affine è parte del piano proiettivo. Certo una simile inclusione è causa di perdita di informazioni. Lavorando nel piano proiettivo i concetti di parallelismo, lunghezza, rapporto semplice, misura d'angolo non hanno più senso e possiamo solo conservare i tre concetti di allineamento, concorrenza, birapporto.

Dunque tutto questo si può applicare solo a situazioni in cui siamo interessati unicamente a queste tre caratteristiche; tali situazioni si dicono *invarianti per proiettività*, o *proiettive*.

Per quanto riguarda la notazione, dobbiamo dire che la maggior parte di quella introdotta nelle pagine precedenti non è standard, soprattutto per quanto riguarda le mappe da parti del proiettivo a piani affini; inoltre, è ingombrante, nell'affrontare un problema di geometria, riportare formalmente i passaggi dall'affine al proiettivo e viceversa tramite applicazioni e formule. Per tanto, nel seguito utilizzeremo piuttosto espressioni del tipo *passando al proiettivo* o *scegliendo una carta affine*; daremo ovviamente un significato preciso a queste frasi in quanto segue.

Supponiamo di avere un problema di geometria euclidea, ovvero di avere un piano, alcuni punti e alcune rette su di esso; dicendo che *passiamo al proiettivo* vogliamo dire che consideriamo quel piano identificato con un qualche insieme $U_K$ del piano proiettivo (di quelli definiti nella sezione 1), tramite la mappa $j_K$, o meglio la sua inversa.

In tal modo possiamo descrivere gli oggetti geometrici coinvolti nel nostro problema tramite l'impiego di coordinate proiettive.

Avendo invece il piano proiettivo, la *scelta di una carta affine* è data dalla scelta di una retta $\ell_K$ da utilizzare come retta all'infinito, allo scopo di riottenere un piano affine, come immagine della mappa $j_K$.

Il passaggio al proiettivo permette di sfruttare la maggiore flessibilità delle coordinate proiettive per risolvere problemi euclidei, mentre passare al proiettivo e poi scegliere una carta affine diversa da quella di partenza permette di cambiare la retta all'infinito del problema, modificando parallelismi e incidenze nell'affine.

Più nel dettaglio, supponiamo di avere il piano euclideo e al suo interno una retta affine $r$; passando al proiettivo, il piano diventerà un sottoinsieme $U$ di $\mathbb{P}^2$ e la retta verrà a far pare di una retta proiettiva $\ell$; se ora noi scegliamo $\ell$ come retta all'infinito otterremo un "nuovo" piano euclideo in cui la retta $r$ non esiste più. Se inoltre prima avevamo, nel primo piano euclideo, due rette $s$ e $t$ che si incontravano in un punto di $r$ le loro immagini tramite il passaggio al proiettivo e la scelta di $\ell$ come retta all'infinito sono due rette parallele, nel nuovo piano euclideo.

E' bene ricordare che la situazione del nuovo piano euclideo sarà determinata a meno di affinità.

Se vogliamo invece guardare alle coordinate, supponiamo di avere un piano affine, in cui sia fissato un sistema di coordinate cartesiane $x, y$. E' abbastanza naturale passare al proiettivo associando al punto affine $(x, y)$ il punto proiettivo $[x, y, 1]$; la corrispondente scelta di una carta affine consisterà nel selezionare una retta proiettiva $\ell$ e nell'operare una proiettività $T$ che porti $\ell$ in $\{z = 0\}$, per poi associare al punto proiettivo $[x, y, z]$ (che ha tali coordinate *dopo* l'applicazione di $T$) il punto affine $(x/z, y/z)$.

Le rette si comportano in modo abbastanza simile: se consideriamo una retta proiettiva

$$\{[x, y, z]|lx + my + nz = 0\}$$

vediamo che, tramite la scelta di $\{z = 0\}$ come retta all'infinito, essa corrisponde alla retta affine

$$\{(x, y)|lx + my + n = 0\}$$

E, del resto, una retta affine della forma

$$\{(x, y)|ax + by + c = 0\}$$

viene portata nella retta proiettiva

$$\{[x, y, z]|ax + by + cz = 0\}$$

E' importante ricordare che la corrispondenza tra $[x, y, z]$ e $(x/z, y/z)$ non è biunivoca tra retta proiettiva e retta affine, ma esclude il punto di intersezione della retta proiettiva con la retta $\{z = 0\}$. Per questo, il passaggio da una retta (o più in generale una curva) affine ad una retta (o una curva) proiettiva viene detto *chiusura proiettiva*, in quanto consiste nell'aggiungere alla retta (o alla curva) il punto (o i punti) all'infinito.

Oltre alla geometria di intersezione di punti e rette, l'altro invariante proiettivo che conosciamo è il birapporto. Vediamo a cosa corrisponde nella geometria affine.

Siano $A$, $B$, $C$, $D$ quattro punti allineati nel piano euclideo. A meno di un'affinità (che essendo indotta da una proiettività non cambia il birapporto), possiamo supporre che sia

$$A = (0, 0) \quad B = (1, 0) \quad C = (c, 0) \quad D = (d, 0)$$

il che vuol dire che $AC/CB = c/(1-c)$ e $AD/DB = d/(1-d)$ (ricordando che i rapporti semplici sono invarianti per affinità). Passando al proiettivo, otteniamo i quattro punti

$$[0,0,1] \quad [1,0,1] \quad [c,0,1] \quad [d,0,1]$$

che chiamiamo ancora $A$, $B$, $C$, $D$. Si ha

$$C = (1-c)A + cB \qquad D = (1-d)A + dB$$

e dunque

$$(A;B;C;D) = c(1-d)/(1-c)d$$

ovvero, intendendo orientati i rapporti tra segmenti,

$$(A;B;C;D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}$$

da cui il nome di birapporto.

In ultimo, precisiamo meglio il legame tra affinità e proiettività. Consideriamo una proiettività $T$ che fissi una certa retta $\ell$, nel senso che

$$\{T(P) \mid P \in \ell\} = \ell$$

ovvero che $\ell$ viene lasciata ferma nel suo insieme, non punto per punto.

Se ora consideriamo il piano affine $U$ ottenuto levando $\ell$, possiamo considerare $T|_U$, ovvero la restrizione di $T$ ai soli punti di $U$, in quanto $T$ manda un punto di $U$ in un punto $U$. Ora, fissiamo delle coordinate in cui $\ell : \{z = 0\}$; allora $T$ sarà associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Inoltre, se $P : [x,y,z] \in U$, quindi $z \neq 0$, a $P$ associamo il punto affine $P' : (x/z, y/z)$; ora, avremo

$$T(P) = [a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{33}z]$$

che corrisponde al punto affine

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}\frac{x}{z} + \frac{a_{12}}{a_{33}}\frac{y}{z} + \frac{a_{13}}{a_{33}}, \frac{a_{21}}{a_{33}}\frac{x}{z} + \frac{a_{22}}{a_{33}}\frac{y}{z} + \frac{a_{23}}{a_{33}}\right)$$

ovvero il trasformato di $P'$ sotto l'affinità

$$\begin{cases} u' &= \frac{a_{11}}{a_{33}}u + \frac{a_{12}}{a_{33}}v + \frac{a_{13}}{a_{33}} \\ v' &= \frac{a_{21}}{a_{33}}u + \frac{a_{22}}{a_{33}}v + \frac{a_{23}}{a_{33}} \end{cases}$$

Con il procedimento inverso si può associare ad ogni affinità una proiettività che fissa la retta all'infinito.

## Esempi

1. Due triangoli $ABC$ e $DEF$ del piano affine si dicono *prospettici* se le rette $AD$, $BE$, $CF$ concorrono o sono parallele (a meno di permutare le lettere di uno dei due triangoli). Passando al proiettivo, ci troviamo nelle ipotesi del teorema di Desargues e dunque possiamo affermare che i tre punti (proiettivi) $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ sono allineati; ritornando all'affine, dobbiamo distinguere alcuni casi: se nessuna coppia di lati corrispondenti è parallela, abbiamo tre punti di intersezione che sono allineati; se solo $AB$ e $DE$ sono paralleli, allora gli altri due punti di intersezione giacciono su una retta anch'essa parallela a questi due; se $AB$ e $DE$ sono paralleli, come pure $BC$ e $EF$, allora anche $CA$ e $FD$ sono paralleli, notando che non è possibile che $AB$, $DE$, $BC$, $EF$ abbiano tutti la stessa direzione, se i triangoli non sono degeneri.

   Allo stesso modo è possibile trasferire nell'affine l'implicazione inversa.

2. Se quattro punti hanno birapporto $-1$, sono detti quaterna armonica; supponiamo ora che $(A;B;C;D)$ siano una quaterna armonica e che $D$ stia sulla retta $\{z=0\}$. A meno di proiettività possiamo supporre che $A:[0,0,1]$ e $B:[1,0,1]$. Allora la retta su cui giacciono i 4 punti sarà $\{y=0\}$ e dunque $D:[1,0,0]$. A questo punto possiamo calcolare le coordinate di $C$, in quanto $D=-A+B$ e se $C=\alpha A+\beta B$, dobbiamo avere
$$-1 = \frac{\beta(-1)}{\alpha(1)} = -\frac{\beta}{\alpha}$$
   Quindi $C:[c,0,2c]$. Passando all'affine
$$A=(0,0) \quad B=(1,0) \quad C=(1/2,0)$$
   Ovvero, se tre punti affini stanno sulla retta $r$, essi formano una quaterna armonica con il punto all'infinito di $r$ se e solo se il terzo è il punto medio tra gli altri due.

3. Una proiettività può mandare qualsiasi quaterna di punti a tre a tre non allineati (ovvero *in posizione generica*) in qualsiasi altra quaterna dello stesso tipo. Quindi, ad esempio, si possono sempre fissare delle coordinate in cui un dato quadrilatero $ABCD$ corrisponda al riferimento proiettivo $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$. Allora, i quattro lati saranno
$$AB:\{z=0\} \quad BC:\{x=0\}$$
$$CD:\{x=y\} \quad DA:\{y=z\}$$
   e le due diagonali interne
$$AC:\{y=0\} \quad BD:\{x=z\}$$
   Inoltre, se $E=AB\cap CD$, $F=BC\cap DA$ e $G=AC\cap BD$, avremo
$$E:[1,1,0] \quad F:[0,1,1] \quad G:[1,0,1]$$
   Infine, troviamo anche le espressioni delle rette $EF$, $EG$, $FG$, che sono
$$x+z=y \quad y+z=x \quad x+y=z$$

La configurazione così ottenuta, formata dal quadrilatero $ABCD$, dai punti $E$, $F$, $G$, dalle diagonali interne $AC$ e $BD$ e dalla diagonale esterna $EF$, si chiama *quadrilatero completo*.

4. Sia $ABC$ un triangolo e sia $P$ un punto al suo interno; per la proprietà delle proiettività sopra citata, possiamo scegliere delle coordinate di modo che
$$A : [1, 0, 0] \quad B : [0, 1, 0] \quad C : [0, 0, 1] \quad P : [1, 1, 1]$$
In questo modo le ceviane per $P$ saranno le rette
$$AP : \{y = z\} \quad BP : \{x = z\} \quad CP : \{x = y\}$$
e i vertici del triangolo pedale di $P$ saranno
$$AP \cap BC = D : [0, 1, 1] \quad BP \cap AC = E : [1, 0, 1] \quad CP \cap AB = F : [1, 1, 0]$$
Osserviamo che, se definiamo i punti
$$U : [0, 1, -1] \quad V : [1, 0, -1] \quad W : [1, -1, 0]$$
abbiamo che
$$(B; C; D; U) = (C; A; E; V) = (A; B; F; W) = -1$$
ed inoltre la retta $\ell_G : \{x + y + z = 0\}$ contiene $U$, $V$, $W$.
Se dunque utiliziamo $\ell_G$ come retta all'infinito, otteniamo un piano affine in cui abbiamo un triangolo $ABC$ e tre punti sui lati che, in base a quanto detto nel secondo esempio, sono i loro punti medi. Dunque, $P$ è il baricentro di $ABC$.

5. Ritorniamo al quadrilatero completo. Siano $P = BC \cap EG$ e $Q = DA \cap EG$; allora
$$P : [0, 1, -1] \quad Q : [2, 1, 1]$$
Dunque, sulla retta $EG$, $E - G = P$ e $E + G = Q$, ovvero
$$(E; G; P; Q) = -1$$
e similmente si può ottenere con la retta $FG$ e le sue intersezioni con i lati $AB$ e $CD$, oppure con la retta $EF$ e le sue intersezioni con le diagonali interne.
Inoltre, sulla retta $BC$ si ha, ad esempio, che i punti $B$, $C$, $F$, $P$ formano una quaterna armonica, infatti
$$B + C = F \qquad B - C = P$$
e, per proiezione da $E$ o per calcolo diretto, anche il birapporto di $A$, $D$, $F$, $Q$ è pari a $-1$.
Lo stesso si può ottenere sui lati $AB$ e $CD$ rispetto al punto $E$ ed alle intersezioni di $FG$.

6. I risultati a proposito dei quadrilateri completi enunciati in precedenza si possono ottenere anche *mandando all'infinito* le rette opportune. Ad esempio, poniamo di mandare all'infinito la retta $EF$; otterremo un piano affine in cui vi sono quattro punti che formano ancora un quadrilatero non degenere $ABCD$. Solo, ora, $AB$ e $CD$ saranno tra loro paralleli, come anche $BC$ e $DA$; dunque il quadrilatero è un parallelogramma. A meno di affinità, possiamo supporre anche che $ABCD$ sia un quadrato. A questo punto, $G$ diventa il centro del quadrato e la retta $EG$, parallela a $AB$ e $CD$, incontra, ovviamente, $BC$ e $DA$ nei rispettivi punti medi, il che dice che
$$(B; C; F; P) = (D; A; F; Q) = -1$$
Del resto, è altrettanto ovvio che $G$ sia il punto medio di $P$ e $Q$ e dunque che
$$(P; Q; G; E) = (E; G; P; Q) = -1$$
Tali risultati sono poi validi in generale in quanto il birapporto è invariante per proiettività (e quindi anche per affinità).

## Esercizi

1. Siano dati tre punti allineati $A_1$, $A_3$, $A_5$ in quest'ordine e altri tre punti allineati tra loro, ma non con i precedenti, $A_2$, $A_4$, $A_6$ in quest'ordine. Sia $B_i = A_iA_{i+1} \cap A_{i+3}A_{i+4}$, dove $i = 1, 2, 3$ e gli indici sono intesi modulo 6. Dimostrare che $B_1$, $B_2$, $B_3$ sono allineati.

2. Sia dato un triangolo generico $ABC$ non degenere; fissare un sistema di riferimento proiettivo di modo che, nella carta affine $\{z \neq 0\}$ il triangolo $ABC$ sia equilatero.

3. Determinare una proiettività $T$ tale che, dette $A$, $B$, $C$ le immagini di $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$, nella carta $\{z \neq 0\}$ il triangolo $ABC$ sia rettangolo in $A$.

4. Sia $H$ l'ortocentro di $ABC$, siano $P$,$Q$,$R$ le sue proiezioni sui lati $BC$, $CA$, $AB$. Dimostrare che le tre intersezioni
$$PQ \cap AB \qquad QR \cap BC \qquad RP \cap CA$$
giacciono sulla stessa retta.

5. Siano come prima $ABC$ un triangolo e $P$, $Q$, $R$ le proiezioni dell'ortocentro sui lati; è possibile, tramite una proiettività, lasciare fissi i punti $A$, $B$, $C$ e portare $P$, $Q$, $R$ nei punti medi dei lati?

   *Nota Bene :* con l'espressione "tramite una proiettività", si intende il seguente passaggio:
$$(x, y) \mapsto [x, y, 1] \mapsto T([x, y, 1]) = [x', y', z'] \mapsto \left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right)$$
   ovvero l'immersione del piano affine in un proiettivo, l'applicazione di una proiettività e il ritorno all'affine tramite l'inverso della proiezione precedente.

6. Con le notazioni precedentemente introdotti per i quadrilateri completi, sia $r$ una retta generica che non fa parte del quadrilatero completo; siano $U$, $V$, $W$ le intersezioni di $AC$, $BD$ e $EF$ con $r$ e siano $R$, $S$, $T$ i punti sulle tre diagonali tali che

$$(A; C; R; U) = (B; D; S; V) = (E; F; T; W) = \lambda$$

   Allora $R$, $S$, $T$ sono allineati.

7. Sia $ABC$ un triangolo e siano $D$, $E$, $F$, $D'$, $E'$, $F'$ sui lati di tale triangolo tali che

$$\frac{BD}{CD}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB} = \frac{BD'}{D'C}\frac{CE'}{E'A}\frac{AF'}{F'B}$$

   intendendo i rapporti con segno. Allora esiste una proiettività che fissa $A$, $B$, $C$ e manda $D$ in $D'$, $E$ in $E'$, $F$ in $F'$. Utilizzare questo risultato per dimostrare il teorema di Ceva.

8. Dimostrare il teorema di Menelao, per dualità.

9. Con la notazione e le coordinate dell'esempio 4, dimostrare che, scegliendo $\ell_G$ come retta all'infinito, il punto di coordinate $[p, q, r]$ corrisponde al punto affine $Q$ tale che le aree dei triangoli $BCQ$, $CAQ$, $ABQ$, considerate con segno, stanno tra loro come $p$, $q$, $r$.[15]

## 1.7 Esercizi misti

Proponiamo ora alcuni esercizi che sviluppano ed elaborano i concetti esposti finora, offrendo punti di vista a volte diversi da quelli forniti nel testo.

1. Siano $P$ un punto e $r$ una retta che non lo contiene. Per ogni $s \in \mathfrak{F}_P$, si consideri la proiettività di $s$ che fissa $P$, $r \cap s$ e, per ogni altro punto $Q$ su $s$, lo scambia con il punto $Q'$ tale che $(P; r \cap s; Q; Q') = \lambda$. Dimostrare che esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2$ che, ristretta ad ogni $s \in \mathfrak{F}_P$, induce la proiettività della retta $s$ sopra descritta.

2. Se invece di $\lambda$ si impone che il birapporto sia un generico $\lambda(s)$, non indipendente da $s$, rimane vera la tesi dell'esercizio precedente? Quali condizioni necessarie si devono imporre su $\lambda(s)$?

3. Dati 5 punti $A$, $B$, $C$, $D$, $P$, di cui $P$ non stia su nessuna delle rette individuate da due degli altri, definiamo

$$(A; B; C; D)_P = (PA; PB; PC; PD)$$

   Ora, fissati 4 punti in posizione generica e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, determinare il luogo $Q_\lambda$ dei punti $P$ tali che

$$(A; B; C; D)_P = \lambda$$

[15] La domanda è ben posta in quanto i rapporti tra aree sono invarianti per affinità; più correttamente si dovrebbe chiedere di dimostrare quanto detto in ogni carta affine che abbia come retta all'infinito $\ell_G$.

4. Determinare l'insieme
$$\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}} Q_\lambda$$

5. Data una dualità $\mathcal{D}$, determinare l'insieme dei punti $P$ che appartengono alla propria retta duale.

6. Dimostrare che una proiettività di $\mathbb{P}^2$ ha sempre almeno un punto fisso. Trovare un esempio di proiettività della retta $\mathbb{P}^1$ che non abbia punti fissi. Cosa si può dire per una proiettività di $\mathbb{P}^3$?

7. Dimostrare che ogni proiettività della retta che fissa due punti è del tipo descritto nell'esercizio 1; sia $T_\lambda$ la proiettività di $\mathbb{P}^1$ che fissa $A$, $B$ e scambia tra loro i punti che realizzano con $A$, $B$ il birapporto $\lambda$. Ovviamente, $T_\lambda \circ T_\mu$ è ancora una proiettività di questo tipo e quindi sarà una certa $T_\nu$. Trovare l'espressione di $\nu$ in funzione di $\lambda$ e $\mu$.

8. Dimostrare che ogni bigezione di $\mathbb{P}^2$ in sè che manda rette in rette e conserva il birapporto di ogni quaterna di punti allineati è una proiettività.[16]

9. Determinare una condizione necessaria e sufficiente sulle dualità $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ affinché gli insiemi
$$\{P \in \mathbb{P}^2 \mid P \in \mathcal{D}(P)\} \qquad \{P \in \mathbb{P}^2 \mid P \in \mathcal{D}'(P)\}$$
coincidano.

10. Una prospettività tra piani di $\mathbb{R}^3$ è definita come segue: siano $\pi_1$, $\pi_2$ due piani affini di $\mathbb{R}^3$ e sia $P$ un punto esterno ad entrambi; per ogni $Q \in \pi_1$, si consideri, se esiste, il punto $f(Q) \in \pi_2$ tale che le rette da $P$ per $Q$ e $f(Q)$ coincidono. Trovare i punti di $\pi_1$ per cui tale mappa non è definita e i punti di $\pi_2$ che non stanno nella sua immagine; dimostrare inoltre che, intendendo $\pi_1$ e $\pi_2$ come opportune carte affini di $\mathbb{P}^2$, esiste una proiettività $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ (unica) che induce nell'affine la prospettività descritta. Tale proiettività si dice prospettività di $\mathbb{P}^2$.

11. Dimostrare che ogni proiettività è ottenibile come composizione di al più 3 prospettività.

[16] In realtà, la richiesta sul birapporto non è necessaria, nel caso in cui si prendano coordinate reali, ma la dimostrazione diventa in tal caso molto complicata.

# Parte II

# Coniche

## 2.1 Definizione e proprietà

Una *curva algebrica piana proiettiva* è un insieme del tipo

$$\mathcal{A} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

dove $F$ è un polinomio omogeneo a coefficienti reali in tre variabili. Ovvero, esiste $d \geq 0$ intero, detto *grado* di $\mathcal{A}$ (e di $F$), tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z)$$

Tale proprietà garantisce che l'insieme $\mathcal{A}$ è ben definito, infatti, se $(x, y, z)$ e $(x', y', z')$ rappresentano la stessa terna omogenea, $F(x, y, z) = 0$ se e solo se $F(x', y', z') = 0$.

In quanto segue, saremo principalmente interessati alle curve algebriche piane di grado 2, ovvero alle *coniche*. Dunque, una conica proiettiva è l'insieme

$$\mathcal{C} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid Q(x, y, z) = 0\}$$

dove $Q$ è un polinomio omogeneo di secondo grado, ovvero della forma

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$$

dove $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ sono numeri reali, determinati, come è ovvio, a meno di una comune costante moltiplicativa, ovvero sono una sestupla omogenea. I coefficienti 2 che compaiono nell'espressione sopra riportata hanno in parte motivazioni storiche legate all'interpretazione di quelle parti come doppi prodotti di sviluppi notevoli, in parte arrivano dalla seguente definizione alternativa di conica proiettiva.

Sia $A$ una matrice reale $3 \times 3$ simmetrica, ovvero tale che $A = A^t$; ad essa è associata una applicazione bilineare da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ data da $q(v, w) = v^t A w$, dove $v$, $w$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$. Possiamo dunque considerare il luogo di zeri della forma quadratica associata:

$$C = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid q(v, v) = 0\}$$

Tale luogo è un cono sull'origine, ovvero se $v \in C$, allora $\lambda v \in C$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; dunque possiamo considerare $C$ come un insieme di rette per l'origine di $\mathbb{R}^3$, ovvero come un sottoinsieme $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2$, dato dai punti $P$ tali che $P^t A P = 0$. Tale insieme viene detto *conica proiettiva*.

Se scriviamo quest'ultima definizione in coordinate, otteniamo che la condizione imposta sulle coordinate di $P$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & F & D \\ F & B & E \\ D & E & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

e dunque

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 0$$

Vediamo così che le due definizioni sono equivalenti.

Diremo che il polinomio $Q(x, y, z)$ definisce l'equazione della conica, mentre chiameremo $A$ (che denoteremo anche con $Q$ se questo non crea confusione con il polinomio) matrice associata alla conica.

Se la matrice $A$ ha determinante nullo, la conica associata si dice *degenere*; se il polinomio $Q$ è prodotto di fattori lineari, la conica associata si dice *riducibile*. Per una conica, questi due concetti coincidono. Questo fatto, di cui non diamo la dimostrazione, implica che una conica degenere sarà unione di due rette, eventualmente coincidenti.

Noi ci occuperemo principalmente di coniche irriducibili, ovvero non degeneri.

Se fissiamo una conica non degenere $\mathcal{C} = \{P^tQP = 0\}$, le sue intersezioni con una generica retta $r$ si possono trovare agevolmente scrivendo $r$ in forma parametrica. Se infatti fissiamo $A$, $B$ punti su $r$ e scriviamo ogni punto $P$ di $r$ come $P = \lambda A + \mu B$, avremo che $P \in \mathcal{C}$ se e solo se

$$(\lambda A + \mu B)^t Q(\lambda A + \mu B) = 0$$

ovvero

$$\lambda^2 A^tQA + 2\lambda\mu A^tQB + \mu^2 B^tQB = 0$$

che è un'equazione omogenea di secondo grado in $[\lambda, \mu]$. Nel ricavare l'espressione, abbiamo utilizzato il fatto che $Q^t = Q$ e quindi $A^tQB = (A^tQB)^t = B^tQ^tA = B^tQA$ (infatti, essendo $A^tQB$ un numero reale, coincide con la sua trasposta).

Una retta $r$ si dice *tangente* alla conica $\mathcal{C}$ nel punto $P$ se e solo se l'equazione sopra scritta ammette due soluzioni coincidenti $[\lambda, \mu]$ e $P = \lambda A + \mu B$. Definiamo le derivate parziali di $Q(x, y, z)$ come i polinomi di primo grado

$$Q_x(x, y, z) = 2Ax + 2Fy + 2Ez$$

$$Q_y(x, y, z) = 2By + 2Fx + 2Dz$$

$$Q_z(x, y, z) = 2Cz + 2Dy + 2Ex$$

se il punto $P$ appartiene alla conica, l'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in $P$ è

$$r_P = \{[x, y, z] \mid xQ_x(P) + yQ_y(P) + zQ_z(P) = 0\}$$

Infatti, vale l'identità algebrica

$$xQ_x + yQ_y + zQ_z = 2Q$$

e dunque, se un punto $A$ appartiene alla retta, per esso vale $P^tQA = 0$, e se inoltre $A$ appartiene anche alla conica, avremo che $A^tQA = 0$. Quindi, in $\mathbb{R}^3$, il vettore $QA$ è ortogonale sia a $P$ che ad $A$; ma anche il vettore $QP$ è ortogonale a questi due e quindi $QA = kQP$ che è possibile se e solo se $A = kP$, in quanto $Q$ ha determinante non nullo, ma allora $A$ e $P$ sono lo stesso punto proiettivo.

Due coniche si dicono *proiettivamente equivalenti* se si possono trasformare l'una nell'altra tramite una proiettività. Se la conica $\mathcal{C}$ è associata alla matrice $A$, l'insieme

$$T(\mathcal{C}) = \{T(P) \mid P \in \mathcal{C}\}$$

è ancora una conica e, se $B$ è la matrice associata alla proiettività $T$, ad essa è associata la matrice ${B^{-1}}^t AB^{-1}$. Infatti $P'$ appartiene a $T(\mathcal{C})$ se e solo se il punto $T^{-1}(P') = B^{-1}P'$ appartiene a $\mathcal{C}$, ovvero se e solo se $P'^t {B^{-1}}^t AB^{-1}P' = 0$.

## Esempi

1. Poiché utilizziamo solo coefficienti reali, non tutti i polinomi omogenei di secondo grado avranno un luogo di zeri non vuoto in $\mathbb{P}^2$: ad esempio la conica $\{x^2+y^2+z^2=0\}$ è vuota, come anche, in generale, ogni conica del tipo $\{px^2+qy^2+rz^2=0\}$ con $p$, $q$, $r$ positivi. Potrà anche capitare che una conica sia formata da un solo punto, come è il caso di $\{x^2+y^2=0\}$, che contiene solo il punto $[0,0,1]$.

2. Una conica $\mathcal{C}$ contiene un punto $P$ se e solo se, ovviamente, $P^tQP=0$, ovvero $Q(x,y,z)=0$ con $P:[x,y,z]$. Consideriamo quindi l'equazione

   $$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy=0$$

   nelle variabili $A,\ldots,F$, considerate come sestupla omogenea.

   Quindi, per imporre che una conica passi, ad esempio, per il punto $[1,0,0]$, ci basterà chiedere che i coefficienti soddisfino l'equazione (lineare!)

   $$Q(1,0,0)=0$$

   ovvero sia

   $$A=0$$

   Similmente i passaggi per i punti $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ saranno imposti dalle equazioni $B=0$ e $C=0$. Quindi la generica conica che passa per questi tre punti è della forma

   $$\{Dyz+Exz+Fxy=0\}$$

   dove abbiamo tolto il fattore comune 2, che era stato inserito solo per motivi di coerenza con la forma matriciale.

   Abbiamo ancora tre coefficienti da determinare a meno di un fattore comune, ovvero possiamo imporre ancora due condizioni omogenee. Ad esempio, possiamo richiedere che questa conica passi per i punti $[1,1,1]$ e $[2,1,-1]$, ottenendo le condizioni

   $$\begin{cases} D+E+F &= 0 \\ -D-2E+2F &= 0 \end{cases}$$

   da cui $[D,E,F]=[-4,3,1]$. Dunque la conica cercata è

   $$\{-4yz+3xz+xy=0\}$$

   Che corrisponde alla matrice

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   a meno di un fattore 2.

3. In generale, dati 5 punti a tre a tre non allineati, esiste un'unica conica non degenere che passa per tutti loro ed i suoi coefficienti sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + 2Dy_1z_1 + 2Ex_1z_1 + 2Fx_1y_1 & = & 0 \\ Ax_2^2 + By_2^2 + Cz_2^2 + 2Dy_2z_2 + 2Ex_2z_2 + 2Fx_2y_2 & = & 0 \\ Ax_3^2 + By_3^2 + Cz_3^2 + 2Dy_3z_3 + 2Ex_3z_3 + 2Fx_3y_3 & = & 0 \\ Ax_4^2 + By_4^2 + Cz_4^2 + 2Dy_4z_4 + 2Ex_4z_4 + 2Fx_4y_4 & = & 0 \\ Ax_5^2 + By_5^2 + Cz_5^2 + 2Dy_5z_5 + 2Ex_5z_5 + 2Fx_5y_5 & = & 0 \end{cases}$$

dove $[x_i, y_i, z_i]$ sono le coordinate dei cinque punti. Tale sistema è sempre risolvibile e la soluzione è data dalla sestupla dei minori $5 \times 5$.

Nel caso in cui vi siano terne di punti allineati, la conica non sarà irriducibile: se ad esempio cerchiamo una conica passante per i punti $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 0]$ e $[1, 0, 1]$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A & = & 0 \\ B & = & 0 \\ C & = & 0 \\ F & = & 0 \\ E & = & 0 \end{cases}$$

la cui ovvia soluzione porta alla conica $\{yz = 0\}$, ovvero all'unione delle rette $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$.

4. Se cerchiamo di risolvere il sistema precedente con cinque punti allineati, otterremo la cosiddetta retta doppia, ovvero un'equazione del tipo $(px + qy + rz)^2 = 0$, il cui luogo di zeri coincide con la retta $\{px + qy + rz = 0\}$, ma è come, in un certo senso, se questa retta fosse considerata due volte. Ovviamente, dal punto di vista degli insiemi, questo non ha senso; la distinzione è fatta da un punto di vista algebrico, partendo dal fatto che le due equazioni hanno grado diverso. Tale sofisticazione è utile, spesso, per trattare casi degeneri, costruzioni che, normalmente, restituiscono una conica mentre in certi casi hanno come risultato una singola retta.

5. Cerchiamo ora le coniche degeneri passanti per $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ e $[1, 1, 1]$; tali coniche sono l'unione di due rette. Poiché non vi sono tre punti allineati tra questi quattro, scegliere due rette che, nel loro insieme, li contengano tutti e quattro equivale a dividere i quattro punti in due insiemi da due. Questo può essere fatto in tre modi, dando origine alle tre coppie di rette seguenti:

$$\begin{array}{cc} \{z = 0\} & \{x = y\} \\ \{y = 0\} & \{x = z\} \\ \{x = 0\} & \{y = z\} \end{array}$$

come si può ricavare dallo studio dei quadrilateri completi svolto nelle pagine precedenti. Dunque le tre coniche degeneri (non possono essere di più per quanto detto) che passano per i quattro punti assegnati sono

$$\{z(x - y) = 0\} \qquad \{y(z - x) = 0\} \qquad \{x(y - z) = 0\}$$

che hanno sempre la forma ricavata nell'esempio precedente.

6. Una conica, per come l'abbiamo definita, è il luogo di zeri di un polinomio quadratico omogeneo. Quindi, considerando il piano proiettivo formato dalle rette di $\mathbb{P}^2$, ovvero $\mathbb{P}^{2^*}$, possiamo chiamare conica l'insieme

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^{2^*} \mid \widetilde{Q}(x, y, z) = 0\}$$

con $\widetilde{Q}(x, y, z)$ omogeneo di secondo grado e irriducibile. Questa è una conica in $\mathbb{P}^{2^*}$; vediamo che legame ha con le coniche usualmente intese. Ogni punto $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{C}}$ corrisponde ad una retta $\{\widetilde{P}^t X = 0\}$ in $\mathbb{P}^2$, una volta fissati gli opportuni riferimenti proiettivi. Inoltre, sappiamo che $\widetilde{P}^t Q \widetilde{P} = 0$, indicando con $Q$ la matrice associata alla conica $\widetilde{\mathcal{C}}$. Se dunque consideriamo il punto $Y = QP$, abbiamo che

$$P^t Y = P^t Q P = 0$$

e contemporaneamente

$$Y^t Q^{-1} Y = P^t Q^t Q^{-1} Q P = P^t Q^t P = P^t Q P = 0$$

Dunque, il punto $Y$ appartiene alla conica $\mathcal{C} = \{X^t A X = 0\}$ con $A = Q^{-1}$; inoltre, è facile vedere che la retta $\{P^t X = 0\}$ è tangente a $\mathcal{C}$ in $Y = QP$: la retta può essere scritta anche come $\{Y^t {Q^{-1}}^t X = 0\}$, ovvero $\{Y^t A X = 0\}$ e sappiamo che $Y^t A Y = 0$, quindi possiamo ripetere la dimostrazione che ha concluso questa sezione, per ottenere che $Y$ è l'unico punto in comune tra la retta e la conica. Ripetendo questo ragionamento a ritroso, è facile verificare che ogni retta tangente a $\mathcal{C}$ appartiene alla conica $\widetilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^{2^*}$.

Dunque, $\widetilde{\mathcal{C}}$ è una conica nel piano proiettivo delle rette di $\mathbb{P}^2$ se e solo se è l'insieme delle rette tangenti ad una conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2$. Questo dice, incidentalmente, che il duale di una conica è una conica e che il duale dell'appartenenza di un punto a una conica è la tangenza di una retta a una conica.

7. Consideriamo le due coniche descritte dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ovvero $\mathcal{A} = \{X^t A X = 0\}$ e $\mathcal{B} = \{X^t B X = 0\}$. Vogliamo trovare i loro punti di intersezione; scriviamo quindi il sistema algebrico di secondo grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4zx = 0 \\ 2x^2 - y^2 + 2z^2 - 6xz = 0 \end{cases}$$

ed osserviamo che

$$-(x^2+y^2+z^2-4zx)+(2x^2-y^2+2z^2-6xz) = x^2+z^2-2zx-2y^2 = (x-z)^2-2y^2$$

e tale espressione deve essere nulla. Quindi, dall'equazione della prima conica, si ottiene

$$0 = 2x^2 + 2z^2 - 8xz + x^2 + z^2 - 2xz = 3x^2 - 10xz + 3z^2$$

che ha soluzioni $[9,1]$ e $[1,9]$; dunque le soluzioni dell'intero sistema saranno

$$[9, 4\sqrt{2}, 1] \quad [9, -4\sqrt{2}, 1] \quad [1, 4\sqrt{2}, 9] \quad [1, -4\sqrt{2}, 9]$$

Questo modo di procedere non è sempre agevole, in quanto non è facile, in generale, risolvere un sistema di due equazioni di secondo grado. Notiamo che l'equazione $(x-z)^2 - 2y^2 = 0$, combinazione lineare delle due di partenza, non è altro che una conica degenere formata dalle rette $\{x - z - \sqrt{2}y = 0\}$ e $\{x - z + \sqrt{2}y = 0\}$, su cui si trovano le soluzioni del sistema.

Osserviamo inoltre che, sommando le due equazioni di partenza, si ottiene $3x^2 - 10xz + 3z^2 = 0$ che descrive una conica degenere, unione delle rette $\{9x = z\}$ e $\{x = 9z\}$, anch'esse contenenti le soluzioni.

Dunque le soluzioni possono essere espresse anche come le intersezioni delle due coniche degeneri $2y^2 = (x-z)^2$ e $3x^2 - 10xz + 3z^2$, riducibili alle intersezioni tra quattro rette.

8. In generale, se le due coniche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si incontrano in quattro punti $C_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$ e sono descritte dai polinomi $Q(x,y,z)$ e $R(x,y,z)$, allora ogni conica del tipo

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} = \{\lambda Q(x,y,z) + \mu R(x,y,z) = 0 \mid [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1\}$$

passerà per i punti $C_i$. L'insieme di tutte le coniche di questa forma si dice *fascio di coniche* (a due parametri), i punti $C_i$ si dicono *punti base del fascio* e le coniche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ svolgono, in questo caso, il ruolo di *generatori* del fascio.

Ovviamente, effettuare una combinazione lineare dei polinomi associati equivale a effettuarla con le matrici associate; dunque, ad ogni conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ sarà associata la matrice $\lambda A + \mu B$. Ora, notiamo che, se $\det(\lambda A + \mu B) = 0$, allora la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è degenere; per le proprietà del determinante, questa è un'equazione omogenea di terzo grado in $\lambda, \mu$ che quindi ha al massimo 3 soluzioni. Questo vuol dire che in un fascio di coniche a due parametri ci sono al più 3 coniche degeneri; ora, se conosciamo due di queste tre coniche degneri, le loro intersezioni (che ora danno luogo a sistemi lineari) sono esattamente i punti $C_i$. Quindi per trovare le intersezioni di due coniche, basta trovare le coniche degeneri che appartengono al fascio da loro generato; per fare questo basta trovare delle coppie $[\lambda, \mu]$ che annullino il determinante di $\lambda A + \mu B$.

9. Un altro modo per individuare una conica, oltre che imporre il passaggio per determinati punti, è richiedere la tangenza con una determinata retta. Tramite un'applicazione di dualità, questa richiesta è formalmente identica al passaggio per un punto; quindi, imporre la tangenza con 5 rette a tre a tre non concorrenti è sempre possibile e dà come risultato un'unica conica. Si presti bene attenzione al fatto che non si specifica in quale punto avviene la tangenza.

Ad esempio, la tangenza con la retta $\{x + y + z = 0\}$ si può imporre chiedendo che il sistema

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

abbia una sola soluzione[17]. Questo metodo ha lo svantaggio di essere, in generale, molto complicato dal punto di vista dei calcoli necessari.

Un metodo alternativo può essere quello di imporre che il punto $[1, 1, 1]$ appartenga alla conica $\{X^t Q^{-1} X = 0\}$, se $Q$ è la matrice associata alla conica che stiamo cercando, ricordando quanto detto sulla dualità.

Di certo, se la retta è sufficientemente semplice, si può usare un metodo qualsiasi: la tangenza con la retta $\{x = 0\}$ si impone facilmente, considerando che le intersezioni di una generica conica con questa retta sono date dalle soluzioni di

$$By^2 + C^2 + 2Dyz = 0$$

e dunque, affinché siano coincidenti, basta che $D^2 = BC$. La condizione così trovata è di secondo grado sui coefficienti della matrice $Q$, ma sarebbe di primo grado sui coefficienti della matrice $Q^{-1}$, che è, a meno di multipli, data da

$$\begin{pmatrix} BC - D^2 & ED - FC & FD - EB \\ ED - FC & AC - E^2 & AD - FE \\ FD - EB & AD - FE & AB - F^2 \end{pmatrix}$$

## Esercizi

1. Trovare condizioni necessarie e sufficienti sui coefficienti di una conica perché passi per i punti $[0, 1, 1]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 1, 0]$.

2. Trovare una condizione necessaria e sufficiente su $a$, $b$, $c$ di modo che esista una conica tra quelle trovate nell'esercizio precedente che passi anche per i punti $[0, c, b]$, $[c, 0, a]$, $[b, a, 0]$.

3. Dimostrare che per 5 punti passa una conica non degenere se e solo se sono non nullli i minori $3 \times 3$ della matrice $3 \times 5$ che ha come righe le coordinate dei punti.

4. Trovare la conica tangente alle cinque rette

$$x + y - z = 0 \qquad y + z = 0 \qquad x - y + z = 0$$

$$-x + y + z = 0 \qquad x + z = 0$$

5. Trovare tutte le coniche degeneri passanti per i tre punti

$$[0, 1, 1] \qquad [1, 0, 1] \qquad [1, 1, 0]$$

6. Si trovino gli eventuali punti di intersezione delle due coniche date dalle equazioni

$$7x^2 - y^2 + 14z^2 - 12yz - 8xz + 4xy = 0$$

e

$$11x^2 - 2y^2 + 11z^2 - 8yz - 12xz + 4xy = 0$$

[17] Ovvero due soluzioni coincidenti.

7. Date una dualità associata alla matrice $U$ ed una conica associata alla matrice $A$, l'immagine della conica tramite la dualità è, come detto, l'insieme delle rette tangenti ad un'altra conica. Trovare la matrice associata a quest'ultima.

8. Dimostrare che le coniche $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ e $\{x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xz = 0\}$ sono proiettivamente equivalenti.

9. Data una conica $\mathcal{C}$ non degenere e non vuota e tre punti $A$, $B$, $C$ su di essa, dimostrare che esiste sempre una proiettività $T$ tale che

$$T(A) = [1, 0, 0] \qquad T(B) = [0, 1, 0] \qquad T(C) = [0, 0, 1]$$

$$T(\mathcal{C}) = \{xy + yz + zx = 0\}$$

10. Determinare le dualità tali che il duale della conica $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 - z^2\}$ è formato dalle rette tangenti alla stessa conica $\mathcal{C}$.

## 2.2 Polarità

Consideriamo una dualità $\mathcal{D}$ indotta da una matrice invertibile $A$ e studiamo l'insieme di punti "fissi"

$$\mathrm{Fix}_{\mathcal{D}} = \{P \in \mathbb{P}^2 \mid P \in \mathcal{D}(P)\}$$

Ora, l'immagine del punto $P$ è la retta $\{(AP)^t X = 0\}$, ovvero $\{P^t A^t X = 0\}$; quindi il nostro insieme si può riscrivere come

$$\mathrm{Fix}_{\mathcal{D}} = \{P \in \mathbb{P}^2 \mid P^t A^t P = 0\}$$

Ovviamente, $P^t A^t P = (P^t A^t P)^t = P^t AP$, in quanto sono numeri reali; dunque

$$P^t A^t P = P^t AP = P^t \left( \frac{A + A^t}{2} \right) P$$

Notiamo che la matrice $B = A + A^t$ è simmetrica, poiché

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$$

Diremo che $B$ è il simmetrizzato di $A$; dunque l'insieme $\mathrm{Fix}_{\mathcal{D}}$ non è altro che la conica associata al simmetrizzato di $A$, ovvero $\{P^t BP = 0\}$.

Quando la matrice associata alla dualità è simmetrica, l'applicazione $\mathcal{D}$ gode di alcune interessanti proprietà. Supponiamo infatti che il punto $Q$ appartenga al duale del punto $P$; ciò vuol dire che $P^t B^t Q = P^t BQ = 0$. Ma allora $0 = (P^t BQ)^t = Q^t B^t P$, ovvero $P$ appartiene al duale del punto $Q$. In simboli

$$Q \in \mathcal{D}(P) \Leftrightarrow P \in \mathcal{D}(Q)$$

Assumendo come ipotesi questa proprietà, ci basta conoscere la conica $\mathcal{C} = \mathrm{Fix}_{\mathcal{D}}$ per poter determinare l'azione di $\mathcal{D}$ su tutto il piano. Infatti, se $P$ non appartiene a $\mathcal{C}$, si possono avere due casi

$$\mathcal{D}(P) \cap \mathcal{C} = \{Q,\ R\}$$

oppure

$$\mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D} = \emptyset$$

Nel primo caso, vediamo che, per la proprietà sopra enunciata, $P \in \mathcal{D}(Q)$ e $P \in \mathcal{D}(R)$, ovvero $P = \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(R)$; ma i duali di $Q$ e $R$ sono le rette tangenti a $\mathcal{C}$ in $Q$ ed $R$. Il duale di $P$ è dunque la retta che congiunge i punti di contatto delle tangenti da $P$ a $\mathcal{C}$.

Nel secondo caso, data una qualunque retta per $P$ che intersechi $\mathcal{C}$ in due punti $U$ e $V$, avremo che $\ell(U, V) = \mathcal{D}(W)$ con $W = \mathcal{D}(U) \cap \mathcal{D}(U)$, per quanto detto prima; dunque $P \in \mathcal{D}(W)$, ovvero $W \in \mathcal{D}(P)$. Scegliendo un'altra retta per $P$ che intersechi $\mathcal{C}$ in $U'$ e $W'$ troveremo un punto $W'$ anch'esso sul duale di $P$, che dunque sarà la retta $\ell(W, W')$.

Tale dualità è dunque intrinsecamente associata alla conica $\mathcal{C} = \mathrm{Fix}_{\mathcal{D}}$, in quanto entrambe descritte dalla stessa matrice e ricavabili l'una dall'altra geometricamente. Per questo, una simile dualità gioca un ruolo fondamentale nello studio della conica; essa viene detta *polarità* associata alla conica $\mathcal{C}$ e viene indicata con $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}$ (o semplicemente con pol se non c'è ambiguità). La retta $r = \mathrm{pol}(P)$ viene detta *polare* del punto $P$ e $P$ viene detto *polo* della retta $r$. Come per la dualità, la mappa inversa che associa ad una retta il suo polo viene indicata con lo stesso simbolo ed è associata alla matrice inversa.

Elenchiamo ora alcune proprietà della polarità emerse in questa discussione:

1. $P \in \mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P)$ se e solo se $P \in \mathcal{C}$;
2. se $P \in \mathcal{C}$, $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P)$ è la tangente a $\mathcal{C}$ in $P$;
3. se $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P) \cap \mathcal{C} = \{Q,\ R\}$, $\ell(P, Q)$ e $\ell(P, R)$ sono le tangenti da $P$ a $\mathcal{C}$;
4. $P \in \mathrm{pol}(Q)$ se e solo se $Q \in \mathrm{pol}(P)$;
5. $r$ tangente a $\mathcal{C}$ se e solo se $\mathrm{pol}(r) \in \mathcal{C}$ e $\mathrm{pol}(r)$ è il punto di tangenza;
6. se $r \cap \mathcal{C} = \{Q,\ R\}$, $\mathrm{pol}(r)$ è l'intersezione delle tangenti a $\mathcal{C}$ in $Q$ e $R$.

Inoltre valgono le solite proprietà delle dualità riguardo ad intersezioni e unioni ed ovviamente, se $\mathcal{C}'$ è un'altra conica con matrice associata $C$, $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ è l'insieme delle rette tangenti ad una qualche conica, associata alla matrice ${B^{-1}}^t C B^{-1}$.

Geometricamente, la costruzione della polare di un punto o del polo di una retta sono quelle descritte più sopra, con cui abbiamo mostrato come, dalla conica $\mathcal{C}$, si potesse ricavare l'azione della dualità associata.

## Esempi

1. Consideriamo una matrice invertibile $A$ e sia $S = A^t + A$ il suo simmetrizzato (a meno di un fattore); sia $T = S - 2A$. Si ha

   $$T^t = (S - 2A)^t = (A^t - A)^t = A - A^t = 2A - S = -T$$

   quindi la matrice $T$ è antisimmetrica. Del resto, se ad $A$ sommiamo una matrice antisimmetrica, otterremo ovviamente una matrice $A'$ che ha lo stesso simmetrizzato di $A$. Ora, se $M$ è la matrice associata alla proiettività $T$ e $\mathcal{D}$ è la dualità associata ad $A$, $T_\sharp \mathcal{D}$ ha matrice ${M^{-1}}^t A M^{-1}$, come da un precedente esercizio; quindi, se vogliamo che $\mathrm{Fix}_{\mathcal{D}} = \mathrm{Fix}_{T_\sharp\mathcal{D}}$, dobbiamo avere che, posto $N = M^{-1}$, valga

$$2N^tAN = N^t(S+T)N = S+T'$$

con $T'$ antisimmetrica; quindi, poiché lo spezzamento in simmetrica più antisimmetrica è unico, si deve avere

$$N^tSN = S$$

mentre il fatto che $N^tTN$ sia antisimmetrica è automatico.

2. La dualità classica $\mathcal{D}([p,q,r]) = \{px+qy+rz=0\}$ è associata alla conica vuota $x^2+y^2+z^2=0$ ed infatti non ha punti che appartengano alla propria retta duale. La conica $x^2+y^2-z^2=0$ induce invece la polarità che associa al punto $[p,q,r]$ la retta $\{px+qy-rz=0\}$, infatti la matrice associata alla conica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Visto che la conica non è vuota, ci saranno punti appartenenti alla propria polare, come ad esempio $[1,0,1]$ o $[0,1,1]$ che hanno come polari le rette $\{x-z=0\}$ e $\{y-z=0\}$. Queste due rette si incontrano in $P : [1,1,1]$, che dunque ha come polare la retta per $[1,0,1]$ e $[0,1,1]$, ovvero $\{x+y-z=0\}$, che è proprio $P^tAX = 0$.

3. Siano dati il punto $P : [1,2,3]$ e la conica

$$\mathcal{C} : x^2-y^2+2z^2-2xz = 0$$

Vogliamo trovare le tangenti alla conica dal punto. Consideriamo la retta $\mathrm{pol}(P)$ che ha coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo quindi trovare $\mathrm{pol}(P) \cap \mathcal{C}$, ovvero risolvere

$$\begin{cases} x^2-y^2+2z^2-2xz & = & 0 \\ 2x+2y-5z & = & 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la prima equazione si può riscrivere come $(x-z)^2 = y^2-z^2$ mentre dalla seconda si ricava $2(x-z) = 3z-2y$ e dunque

$$4(y^2-z^2) = 9z^2+4y^2-12yz$$

da cui $13z^2 = 12zy$, che porta alle due soluzioni $[1,-1,0]$ (da $z=0$) e $[17,13,12]$ (da $13z = 12y$). Quindi le tangenti cercate sono le rette

$$\{x+y-z=0\} \qquad \{5x-13y+7z=0\}$$

4. Consideriamo una conica non degenere $\mathcal{C}$ e la polarità associata; sia $P$ un punto che non appartiene a $\mathcal{C}$ e sia $r = \mathrm{pol}(P)$. Scegliamo ora $Q \in r$, sempre non appartenente a $\mathcal{C}$ e sia $s = \mathrm{pol}(Q)$; ovviamente $P \in s$ e $Q \notin s$, quindi $r \cap s = R \neq Q$ e sia $t = \ell(Q, P)$.

   Il triangolo $PQR$ così ottenuto è detto *autopolare* rispetto alla conica $\mathcal{C}$, infatti $\mathrm{pol}(P) = r = \ell(Q, R)$, $\mathrm{pol}(Q) = s = \ell(P, R)$, $\mathrm{pol}(R) = t = \ell(P, Q)$. Ovvero, ogni lato è polare del vertice opposto. Consideriamo ora un riferimento proiettivo formato da $P$, $Q$, $R$ e un quarto punto, per ora qualsiasi, $S$.

   In tale riferimento proiettivo, si ha

$$P : [1, 0, 0] \qquad Q : [0, 1, 0] \qquad R : [0, 0, 1]$$

$$r : x = 0 \qquad s : y = 0 \qquad t : z = 0$$

   e dunque, se $A$ è la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$, si deve avere

$$P^t A = (p, 0, 0) \qquad Q^t A = (0, q, 0) \qquad R^t A = (0, 0, r)$$

   dunque

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

   Supponiamo dapprima che $p$, $q$, $r$ siano concordi in segno e quindi, a meno di un fattore $-1$, positivi; consideriamo quindi una proiettività che fissa $P$, $Q$, $R$, ovvero data da una matrice della forma

$$B_{h,k,j} = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

   Se trasformiamo la conica $\mathcal{C}$ secondo una tale proiettività, essa rimarrà comunque associata ad una matrice diagonale, ma con coefficienti diversi; esplicitamente, essa sarà associata alla matrice

$$A' = {B_{h,k,j}^{-1}}^t A B_{h,k,j}^{-1}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/j \end{pmatrix}$$

   ovvero

$$A' = \begin{pmatrix} p/h^2 & 0 & 0 \\ 0 & q/k^2 & 0 \\ 0 & 0 & r/j^2 \end{pmatrix}$$

   Quindi, scegliendo $h = \sqrt{p}$, $k = \sqrt{q}$, $j = \sqrt{r}$, otteniamo $A' = I$.

   Se uno tra $p$, $q$, $r$ ha segno opposto agli altri due, possiamo supporre, a meno di applicare una proiettività che scambia tra di loro $P$, $Q$, $R$, che sia $p$ e che questo sia negativo. Dunque porremo $h = \sqrt{-p}$, $k$ e $j$ come sopra, ottenendo

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In conclusione, ogni conica non degenere e non vuota è proiettivamente equivalente alla conica $\{-x^2+y^2+z^2=0\}$ (e quindi, due tali coniche sono sempre tra loro equivalenti); similmente ogni conica non degenere vuota è proiettivamente equivalente alla conica $\{x^2+y^2+z^2=0\}$.

5. La costruzione geometrica della retta polare può essere trasferita nel piano affine, utilizzando come coniche le sole circonferenze. Se dunque $P$ è esterno alla circonferenza $\Gamma$, vi saranno due punti $Q$ ed $R$ su $\Gamma$ tali che $PQ$ e $PR$ siano tangenti; allora $\mathrm{pol}_\Gamma(P)=QR$; similmente, se la retta $r$ interseca in $U$ e $W$ la circonferenza $\Gamma$, definiamo $\mathrm{pol}_\Gamma(r)$ come il punto di intersezione delle tangenti a $\Gamma$ in $U$ e $W$. Se poi $P$ è interno a $\Gamma$, consideriamo due qualsiasi rette per $P$ e definiamo $\mathrm{pol}_\Gamma(P)$ come la retta per i loro poli; allo stesso modo, se $r$ non interseca $\Gamma$, prendiamo due punti su $r$ e definiamo $\mathrm{pol}_\Gamma(r)$ come l'intersezione delle loro polari.

   Ora, se $O$ è il centro di $\Gamma$, il punto $OP\cap\mathrm{pol}_\Gamma(P)$ è l'inverso circolare di $P$ rispetto a $\Gamma$, ovvero il punto $P'$ tale che $OP\cdot OP'=R^2$ e che si trova sulla semiretta $OP$; la polare di $P$ è dunque la retta, passante per l'inverso di $P$, perpendicolare al raggio per $P$.

## Esercizi

1. Determinare tutte le matrici $N$ tali che $N^tAN=A$ con

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

   e

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2. Si consideri la conica

$$\mathcal{C}=\{xy-3xz+2yz=0\}$$

   Si calcolino le polari dei punti $[1,1,0]$, $[0,1,1]$, $[1,0,1]$ rispetto a $\mathcal{C}$; si calcolino poi le polari degli stessi punti rispetto a una qualunque conica della forma $\mathcal{C}=\{pxy+qxz+ryz=0\}$ con $p+q+r=0$.

3. Siano $A$, $B$, $C$, $D$ quattro punti su una conica $\mathcal{C}$; siano $r$, $s$, $t$, $u$ le loro quattro polari. Si considerino il quadrilatero di vertici $ABCD$ e il quadrilatero di lati $rstu$; mostrare che la diagonale esterna di $ABCD$ è la polare dell'intersezione delle diagonali interne di $rstu$ e viceversa.

4. Dimostrare che ogni conica degenere è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$\{x^2+y^2=0\}\qquad\{x^2-y^2=0\}\qquad\{x^2=0\}$$

5. Siano $ABC$ un triangolo, $H$ il suo ortocentro, $\Gamma_a$ la circonferenza che ha come diametro $BC$. Dimostrare che il prolungamento di $BC$, la retta per i piedi delle altezze da $B$ e da $C$, la retta per $H$ e l'inverso di $A$ in $\Gamma$ concorrono.

6. Determinare le tangenti alla conica di equazione

$$7x^2 - y^2 + 14z^2 - 12yz - 8xz + 4xy = 0$$

dal punto $[1, 1, 1]$.

7. Definiamo *parte di piano interna alla conica* $\Gamma$ l'insieme

$$\{P \in \mathbb{P}^2 \mid |\mathrm{pol}(P) \cap \Gamma| = 0\}$$

Definiamo invece *parte di piano esterna alla conica* $\Gamma$ l'insieme

$$\{P \in \mathbb{P}^2 \mid |\mathrm{pol}(P) \cap \Gamma| = 2\}$$

Dimostrare che interno ed esterno di una conica sono concetti invarianti per proiettività; dimostrare che per un punto $P$ interno a $\Gamma$ passano solo rette che intersecano due volte la conica e viceversa, una retta che non interseca la conica è composta unicamente di punti esterni alla conica. Studiare infine il comportamento di parte interna e parte esterna sotto dualità.

8. Sia $P$ un punto interno alla conica $\Gamma$, nel senso dato all'espressione nel precedente esercizio. Per ogni retta $s \in \mathcal{F}_P$, siano $A(s)$ e $B(s)$ le intersezioni di $s$ con $\Gamma$; definire la proiettività $T_s : s \to s$ tale che $T_s(P) = P$, $T_s(A(s)) = B(s)$ e $T_s \circ T_s$ sia l'identità. Mostrare che le $T_s$ sono restrizioni di un'unica proiettività $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$; caratterizzare la matrice associata a $T$ in funzione della matrice associata a $\Gamma$ e delle coordinate di $P$.

9. Siano $ABC$ e $DEF$ due triangoli desarguesiani, ovvero tali che $AD$, $BE$, $CF$ concorrono (e quindi, per Desargues, tali che $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ sono allineati); dimostrare che esiste una conica per cui $\mathrm{pol}(A) = EF$, $\mathrm{pol}(B) = FD$, $\mathrm{pol}(C) = DE$. Dimostrare il viceversa.

## 2.3 Birapporto e coniche

Siano dati i punti $A$, $B$, $C$, $D$ in posizione generale. A meno di proiettività, possiamo supporre che

$$A : [1, 0, 0] \quad B : [0, 1, 0] \quad C : [0, 0, 1] \quad D : [1, 1, 1]$$

Sia $\mathcal{C}$ una conica per questi quattro punti; allora

$$\mathcal{C} = \{pyz + qxz + rxy = 0\}$$

con $p + q + r = 0$. Sia infine $Q : [l, m, n]$ un punto di $\mathcal{C}$ distinto dai precedenti. Consideriamo le quattro rette da $Q$ agli altri quattro punti:

$$a : \{ny = mz\} \quad b : \{nx = lz\} \quad c : \{mx = ly\}$$

$$d : \{(n - m)x + (l - n)y + (m - l)z = 0\}$$

Identificando per dualità una retta con la terna omogenea dei suoi coefficienti, possiamo dire che

$$a + b + c = d$$

e dunque, se $c = \lambda a + \mu b$, allora

$$(a; b; c; d) = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\lambda + 1}{\mu + 1}$$

Un facile calcolo mostra che $\lambda = -l/n$ e $\mu = -m/n$ (osserviamo che $n \neq 0$, altrimenti anche uno tra $m$ e $l$ dovrebbe essere nullo e quindi $Q$ sarebbe uno dei primi tre punti); quindi

$$(a; b; c; d) = \frac{m}{l}\frac{l - n}{m - n} = \frac{1 - n/l}{1 - n/m}$$

Osserviamo quindi che

$$pmn + qln + rlm = 0 \Leftrightarrow p\frac{n}{l} + q\frac{n}{m} + r = 0$$

quindi

$$\frac{1 - n/l}{1 - n/m} = \frac{1}{p}\frac{p + r + q(n/m)}{1 - n/m} = -\frac{q}{p}\frac{1 - n/m}{1 - n/m} = -\frac{q}{p}$$

e dunque il birapporto delle quattro rette è costante finché $Q$ sta sulla conica $\mathcal{C}$ e solo in quel caso (come si vede facilmente invertendo i passaggi).

Ricapitolando, dati $A$, $B$, $C$, $D$ in posizione generale, i due birapporti $(A; B; C; D)_P$ e $(A; B; C; D)_Q$[18] sono uguali se e solo se esiste una conica per $A$, $B$, $C$, $D$, $P$, $Q$.

Un'applicazione interessante di questa proprietà è il seguente

**Teorema 5 (Pascal)** *Siano dati sei punti $A_i$, $i = 1, \ldots, 6$ su una conica $\mathcal{C}$; sia, per $j = 1, 2, 3$, $B_j = A_jA_{j+1} \cap A_{j+3}A_{j+4}$, dove gli indici sono intesi modulo 6. Allora i punti $B_j$ sono allineati.*

Per dimostrarlo, consideriamo i punti $C$, $D$ in cui la retta per $B_1$ e $B_3$ (chiamiamola $r$) interseca la conica $\mathcal{C}$; inoltre, siano $E$ ed $F$ i punti di intersezione di $r$ rispettivamente con $A_2A_3$ e $A_5A_6$. Vogliamo dimostrare che $E = F$. Si ha

$$(C; B_3; F; D) = (C; B_3; F; D)_{A_6} = (C; A_1; A_5; D)_{A_6}$$

I punti $C$, $D$, $A_1$, $A_5$ sono sulla conica, quindi

$$(C; A_1; A_5; D)_{A_6} = (C; A_1; A_5; D)_{A_4}$$

ora, $A_4C \cap r = C$, $A_4A_5 \cap r = B_1$, $A_4D \cap r = D$; definiamo $G = r \cap A_1A_4$. Si avrà quindi

$$(C; A_1; A_5; D)_{A_4} = (C; G; B_1; D)$$

proiettando su $r$. Considerando il fascio di rette per $A_1$, otteniamo che

$$(C; G; B_1; D) = (C; G; B_1; D)_{A_1} = (C; A_4; A_2; D)_{A_1}$$

riportando su $\mathcal{C}$; a questo punto possiamo passare da $A_1$ a $A_3$, sempre per il fatto che tutti i punti stanno su $\mathcal{C}$, ottenendo

$$(C; A_4; A_2; D)_{A_1} = (C; A_4; A_2; D)_{A_3}$$

[18] Si intende con questa notazione il birapporto $(QA; QB; QC; QD)$ tra le quattro rette da $Q$ ai punti nominati.

Intersecando ancora con $r$ si ha

$$(C; A_4; A_2; D)_{A_3} = (C; B_3; E; D)$$

Dunque $E = F = B_2 \in r$. $\square$

Un'altra proprietà importante delle coniche è legata al rapporto tra birapporto e polarità. Sia $\mathcal{C}$ una conica e sia $P$ un punto non su di essa; siano poi $r$ una retta per $P$ che intersechi la conica in due punti $A$, $B$ e $Q = r \cap \mathrm{pol}(P)$. Vogliamo determinare $(A; B; P; Q)$.

A meno di proiettività, supponiamo che la conica sia del tipo $\{a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0\}$ e che il punto $P$ abbia coordinate $[1, 0, 0]$. Sia ora $r = \{my + nz = 0\}$ e ricaviamo $A$ e $B$ dal sistema

$$\begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 & = & 0 \\ my + nz & = & 0 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima, si ottiene

$$a^2n^2x^2 + b^2n^2y^2 - c^2m^2y^2 = 0$$

da cui $(anx + yd)(anx - yd) = 0$, dove $d = \sqrt{|b^2n^2 - c^2m^2|}$. Dunque, i due punti hanno coordinate

$$A : [d, -an, am] \qquad B : [d, an, -am]$$

Infine, $\mathrm{pol}(P) = \{a^2x = 0\}$ e $Q : [0, n, -m]$.

Si osserva facilmente che $2aQ = -A + B$ e $2dP = A + B$; quindi

$$(A; B; P; Q) = \frac{2d}{2d} \cdot \frac{-2a}{2a} = -1$$

Tale risultato è spesso utile quando si ha a che fare con quadrilateri completi, in cui vi sono molte quaterne armoniche.

## Esempi

1. Consideriamo un quadrilatero $ABCD$ inscritto in una conica $\mathcal{C}$ e sia $r$ una retta generica che interscehi $\mathcal{C}$ nei punti $P$ e $Q$. Siano inoltre

$$M = AB \cap r \quad N = CD \cap r \quad R = BC \cap r$$

$$S = DA \cap r \quad T = AC \cap r \quad U = BD \cap r$$

Allora esiste una proiettività della retta $r$ in sè, che applicata due volte dia l'identità, che scambia tra loro $P$ e $Q$, $M$ e $N$, $R$ e $S$, $T$ e $U$. Sappiamo che $(P; A; Q; C)_B = (P; A; Q; C)_D$ e dunque intersecando con $r$ abbiamo $(P; M; Q; R) = (P; S; Q; N) = (Q; N; P; S)$. Sia allora $H$ una proiettività di $r$ tale che

$$H(P) = Q \qquad H(Q) = P \qquad H(M) = N$$

allora $H(R) = S$. Consideriamo ora che $(P; A; Q; B)_C = (P; A; Q; B)_D$ e dunque $(P; T; Q; R) = (P; S; Q; U)$, da cui come prima concludiamo che $H(T) = U$. Dunque $H$ è la proiettività cercata.

2. Spesso il teorema di Pascal è formulato diversamente, affermando che in un esagono inscritto in un una conica i punti di intersezione dei lati opposti sono allineati. Il teorema duale di Pascal, noto come teorema di Brianchon, afferma dunque che, dato un esagono i cui lati tangono tutti una stessa conica, le tre diagonali maggiori concorrono.

3. Il teorema di Pascal vale comunque si ordinino i punti dell'esagono; ad esempio, le due sequenze $ABCDEF$ e $ACBEDF$ definiscono due diversi esagoni, dando luogo a due diversi allineamenti: nel primo caso i punti

$$AB \cap DE \qquad BC \cap EF \qquad CD \cap FA$$

nel secondo i punti

$$AC \cap DE \qquad BC \cap DF \qquad BE \cap FA$$

La retta su cui si trovano i tre punti che il teorema di Pascal dimostra essere allineati si chiama *retta di Pascal*; 6 punti su una conica danno orgine, in generale, a 60 rette di Pascal. Infatti il numero di diversi esagoni è il numero delle diverse sequenze in cui 6 persone possono essere disposte attorno ad un tavolo circolare, a meno quindi di rotazioni; le permutazioni di 6 elementi sono 6! e le loro rotazioni (orarie o antiorarie) sono $2 \cdot 6$, dunque il numero cercato è $6!/12 = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$.

4. Se i punti $A_i$ per $i = 1, \dots, 5$ stanno su una conica $\mathcal{C}$ e un punto $A_6$ del piano è tale che nell'esagono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ le intersezioni dei lati opposti sono allineate, allora $A_6$ sta sulla conica $\mathcal{C}$. Infatti, usando la notazione della dimostrazione del teorema di Pascal, dall'allineamento ricaviamo che

$$(C; A_1; A_5; D)_{A6} = (C; A_1; A_5; D)_{A_4}$$

e dunque $A_6$ sta sulla conica $\mathcal{C}$.

5. Molti risultati possono essere ricavati dal teorema di Pascal portando due vertici consecutivi dell'esagono a coincidere. Il lato tra loro diventerà allora la tangente nel punto. Si consideri ad esempio il quadrilatero $ABCD$ inscritto in una conica e si applichi il teorema di Pascal all"'esagono" $ABBCDD$; allora si avrà che i punti $AB \cap CD$, $BB \cap DD$ e $BC \cap DA$ sono allineati. Ripetendo il ragionamento con l'esagono $AABCCD$, si otterrà che le intersezioni dei lati opposti e le intersezioni delle tangenti nei vertici opposti sono allineate. Se indichiamo con $r$, $s$, $t$, $u$ le quattro tangenti nei vertici e con $rstu$ il quadrilatero da loro formato, possiamo riformulare il risultato dicendo che le diagonali interne di $ABCD$ e di $rstu$ concorrono. Il quadrilatero circoscritto $rstu$ si dice quadrilatero polare, o duale, di $ABCD$ rispetto alla conica.

6. Consideriamo un quadrilatero $ABCD$ e una qualsiasi conica ad esso circoscritta. Come abbiamo dimostrato, le tangenti in $A$ e $B$ si incontrano in $P$ che sta su $GF$, come anche $Q$, punto di incontro delle tangenti in $C$ e $D$. Ora, $P = \mathrm{pol}(AB)$ e $Q = \mathrm{pol}(CD)$, quindi $GF = \mathrm{pol}(E)$. Similmente, $GE = \mathrm{pol}(F)$ e di conseguenza $EF = \mathrm{pol}(G)$. Quindi il triangolo diagonale di un quadrilatero è autopolare rispetto ad ogni conica circoscritta al quadrilatero.

7. Sia $P$ un punto esterno alla conica $\Gamma$ e siano $M$, $N$ le intersezioni tra $\Gamma$ e $\mathrm{pol}(P)$; siano infine $A$, $B$ su $\Gamma$ tali che $AB$ passa per $P$. Allora $(A; B; M; N)_\Gamma = -1$.

   Infatti, se utilizziamo lo stesso $N$ per calcolare il birapporto su $\Gamma$, ci troviamo a cercare il birapporto tra $NA$, $NB$, $NM$ e la tangente in $N$ a $\Gamma$. Quindi otteniamo

   $$(A; B; M; N)_\Gamma = (NA; NB; NM; NP) = (A; B; NM \cap AB; P)$$

   intersecando con la retta $AB$. Per le osservazioni sui rapporti tra polari e birapporto, quest'ultima quaterna è armonica, il che dimostra la tesi.

## Esercizi

1. Un quadrilatero $ABCD$ si dice armonico rispetto alla conica $\Gamma$ se è inscritto in essa e $(A; B; C; D)_\Gamma = -1$[19]. Dimostrare che $P = \mathrm{pol}(AC) \in BD$, $Q = \mathrm{pol}(BD) \in AC$ e, detto $G = AC \cap BD$, si ha $(A; C; G; P) = (B; D; G; Q) = -1$.

2. Sia $\mathcal{A}$ un insieme di punti del piano proiettivo tale che, per ogni 6 punti in $\mathcal{A}$, per ogni esagono da loro formato, le intersezioni dei lati opposti sono allineate. Allora $\mathcal{A}$ è una conica.

3. Dimostrare che le rette di Pascal degli esagoni $ABCDEF$, $ADEBCF$, e $ADCFEB$ concorrono, come anche le rette dei tre esagoni $ABFDCE$, $AEFBDC$, e $ABDFEC$.

4. Dato un quadrilatero $ABCD$, il suo triangolo diagonale è il triangolo che ha come vertici le intersezioni delle coppie di lati opposti e delle diagonali interne. Dimostrare che $ABCD$ e il suo quadrilatero duale rispetto ad una qualsiasi conica circoscritta ad $ABCD$ hanno lo stesso triangolo diagonale.

5. Se un triangolo è inscritto in una conica, i punti di intersezione tra la tangente in un vertice e il lato opposto sono allineati.

6. Sia $\Gamma$ una conica e sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in essa; siano $r$ ed $s$ le tangenti in $A$ e $D$. Poniamo $E = r \cap BC$, $F = s \cap BC$, $X = r \cap S$, $Y = AF \cap DE$, $Z = AB \cap CD$. Allora $X$, $Y$, $Z$ sono allineati.

7. Sia $ABCD$ un quadrilatero con la solita notazione; sia $\Gamma$ una conica ad esso circoscritta. Chiamiamo $R, S$ le intersezioni di $EG$ con $\Gamma$; mostrare che $(G; E; R; S) = -1$.

8. Sia $ABC$ un triangolo e sia $\Gamma$ una conica inscritta in esso, che tange i lati $AB$, $AC$, $BC$ in $M$, $N$, $K$. Sia $r$ una retta; poniamo $O = \mathrm{pol}(r)$, $T = r \cap BC$, $L$ su $BC$ tale che $(B; C; L; T) = -1$, $D = AL \cap MN$. Allora $O$, $K$, $D$ sono allineati.

9. Sia $ABC$ un triangolo e sia $\Gamma$ una conica inscritta in esso; sia $A' = BC \cap \Gamma$; sia poi $K$ l'ulteriore intersezione di $AA'$ con $\Gamma$. Siano infine $B'$ e $C'$ le ulteriori intersezioni di $CK$ e $BK$ con $\Gamma$ rispettivamente; dimostrare che $AA'$, $BB'$, $CC'$ concorrono.

[19] Intendendo $(A; B; C; D)_\Gamma = (A; B; C; D)_P$ per un qualunque punto $P \in \Gamma$

## 2.4 Legame con le coniche affini

Come già fatto alla fine della prima parte di queste note, indaghiamo ora le relazioni tra le coniche proiettive finora studiare e le coniche affini. Più in generale, ci dedichiamo per un momento alle curve algebriche; poniamo di utilizzare sempre la retta $\{z = 0\}$ come retta all'infinito, modificandola, se necessario, tramite cambi di coordinate.

Supponiamo di avere una curva algebrica

$$\mathcal{A} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

dove $F$ è un polinomio omogeneo di grado $d$. Allora, nella carta affine $\{z \neq 0\}$, il corrispondente insieme

$$A = \{(x/z, y/z) \mid [x, y, z] \in \mathcal{A} \cap \{z \neq 0\}\}$$

può essere descritto come luogo di zeri del polinomio $f(u, v) = F^{dH}(u, v) = F(u, v, 1)$.

Infatti $(u, v) \in A$ se e solo se $[u, v, 1] \in \mathcal{A}$ se e solo se $F(u, v, 1) = 0$. $F^{dH}$ si chiama *deomogeneizzazione di $F$*. Similmente, dato un insieme

$$B = \{f(u, v) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

possiamo definirne la *chiusura proiettiva* come l'insieme

$$\mathcal{B} = \{f^H(x, y, z) = 0\}$$

dove $f^H(x, y, z) = z^d f(x/z, y/z)$, con $d = \deg f$[20], si dice *omogeneizzazione di $f$*.

In questo modo, la conica proiettiva generica

$$\mathcal{C} = \{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 0\}$$

diviene la conica affine

$$C = \{Ax^2 + By^2 + 2Fxy + 2Dy + 2Ex + C = 0\}$$

e, viceversa, una generica conica affine

$$Q = \{\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \epsilon y + \phi = 0\}$$

ha, come chiusura proiettiva, la conica

$$\mathcal{Q} = \{\alpha x^2 + \beta y^2 + \phi z^2 + 2\gamma xy + \delta xz + \epsilon yz = 0\}$$

Abbiamo visto che tutte le coniche non degeneri e non vuote sono proiettivamente equivalenti; dovrebbe essere ben noto che nel piano euclideo, invece, due coniche di diverso tipo (iperbole, parabola, ellisse) non possono essere portate l'una nell'altra tramite affinità. Un'affinità altro non è che una proiettività che lascia ferma la retta all'infinito e quindi, in particolare, conserva il numero di

[20] Si intende grado totale, ovvero il grado in $t$ del polinomio $p(t) = f(t, t)$.

intersezioni di una conica con tale retta. Infatti, vediamo che le intersezioni della generica conica con $\{z = 0\}$ sono date da

$$Ax^2 + By^2 + 2Fxy = 0$$

e dunque sono due, una o nessuna a seconda che la quantità $F^2 - BC$ sia positiva, nulla o negativa. Tale quantità si chiama a volte discriminante della conica e determina col proprio segno se essa è un'iperbole, una parabola o un'ellisse.

Questo significa che, una volta scelta una retta all'infinito, non possiamo cambiare il tipo di una conica. Possiamo però sempre applicare un'affinità e quindi trasformare, ad esempio, una generica ellisse nella circonferenza unitaria o una qualsiasi iperbole in una equilatera.

Il passaggio all'affine può essere utile anche per dimostrare teoremi proiettivi; ad esempio, si consideri l'affermazione che $(A; B; C; D)_P$ è costante finché $P$ si muove su una conica per $A$, $B$, $C$, $D$. Scegliendo una conica per quei quattro punti e una retta all'infinito che non la intersechi, nell'affine otteniamo quattro punti su un'ellisse, che può essere portata in una circonferenza con un'affinità. Ora, il birapporto di quattro rette uscenti da un punto dipende solo dai seni degli angoli che le rette formano tra loro, quindi finché $P$ varia sulla circonferenza per $A$, $B$, $C$ e $D$, tali seni rimangono costanti e così il birapporto.

La polarità rispetto ad una conica, se letta in una carta affine in cui la conica è una circonferenza, diventa assai vicina all'inversione circolare: la polare del punto $P$ è la retta perpendicolare ad $OP$ che passa per l'inverso circolare di $P$ ($O$ è il centro della circonferenza).

Inoltre, date una conica $\mathcal{C}$ nel proiettivo e una retta $r$, il centro della conica affine in una qualunque carta che abbia $r$ come retta all'infinito è il polo di $r$ rispetto a $\mathcal{C}$; infatti, si consideri una famiglia di corde paralelle, ovvero le rette $s \in \mathfrak{F}_P$ con $P \in r$. Sia $s$ una tale retta che incontra $\mathcal{C}$ in $A$, $B$ e sia $M$ tale che $(A; B; M; P) = -1$; allora, con $r$ come retta all'infinito, $M$ è il punto medio di $AB$. I punti medi di tali corde sono allineati su una retta che è $\mathrm{pol}(P)$, la cui parte affine individua un diametro della conica, in quanto biseca una famiglia di corde parallele. Inoltre, le rette $\mathrm{pol}(P)$ con $P \in r$ si intersecano tutte in $\mathrm{pol}(r)$, che dunque è il centro della conica, in quanto intersezione dei diametri.

Come è ovvio, la parabola non ha un centro affine, in quanto il polo della retta all'infinito è esattamente l'unico punto di intersezione tra questa e la conica e dunque è anch'esso all'infinito.

## Esempi

1. Se consideriamo la conica $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ nella carta affine $\{z = 1\}$, otteniamo la circonferenza $\{x^2 + y^2 = 1\}$; invece, applicando la proiettività data dalla matrice

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   otteniamo la conica $\{x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$, che nella carta affine $\{z = 1\}$ diventa l'iperbole $\{x^2 - y^2 = 1\}$. Osserviamo che è lo stesso risultato che si ottiene considerando la prima conica nella carta affine $\{y = 1\}$. Infine, se vogliamo utilizzare come retta all'infinito $\{x = z\}$, dobbiamo applicare una proiettività che mandi $\{x = z\}$ in $\{z = 0\}$, come ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la nostra conica si trasformerà in quella associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ovvero nella conica $\{x^2+y^2-z^2-2xy+2xz = 0\}$, che, nella carta $\{z = 1\}$, diviene la curva affine di equazione $x^2+y^2-2xy+2x = 1$, ovvero, tramite il cambio di variabili affine $u = 2x$, $v = x - y$, la parabola $\{u = 1 - v^2\}$. Ancora, notiamo che si perviene allo stesso risultato considerando la conica di partenza nella carta affine $\{x - z = 1\}$: $x^2 + y^2 - (x - 1)^2 = 0$ diviene $2x = 1 - y^2$.

2. Per trovare il centro di una conica affine si può sfruttare il fatto che questo è il polo della retta all'infinito. Consideriamo ad esempio la conica

$$C : 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x + 8y - 9 = 0$$

ed osserviamo che possiamo scrivere la sua equazione come

$$(x, y, 1)A(x, y, 1)^t = 0$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

La chiusura proiettiva di $C$ sarà allora $\mathcal{C} = \{X^tAX = 0\}$; quindi, per conoscerne il centro, dobbiamo trovare il polo di $\{z = 0\}$; per farlo, intersechiamo le polari di due punti su tale retta, $[1, 0, 0]$ e $[0, 1, 0]$:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

La soluzione di tale sistema è $[10, -15, 5] = [2, -3, 1]$ e quindi il centro della nostra conica è $(2, -3)$. Verifichiamone la correttezza con tecniche affini:

$$3x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x + 8y - 9 = \frac{(3x + y)^2}{3} + \frac{5y^2}{3} - 2(3x + y) + 10y - 9$$

e quindi ponendo

$$u = \frac{3x + y}{\sqrt{3}} \qquad v = y$$

otteniamo

$$u^2 + \frac{5}{3}v^2 - 2\sqrt{3}u + 10v - 9 = (u - \sqrt{3})^2 + \frac{5}{3}(v+3)^2 - 21$$

da cui ponendo $a = u - \sqrt{3}$, $b = v + 3$, otteniamo l'equazione

$$a^2 + \frac{5}{3}b^2 = 21$$

che descrive una conica con centro nell'origine. Risalendo le sostituzioni, otteniamo

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{b}{3} + 2 \qquad y = b - 3$$

e dunque le coordinate del centro sono proprio $x = 2$, $y = -3$.

3. Tutti i risultati finora ottenuti per poligoni inscritti e circoscritti a coniche si possono specializzare per poligoni ciclici o circoscritti a circonferenze; ad esempio, in un quadrilatero ciclico, la retta che congiunge le intersezioni $E$, $F$ dei lati opposti è la polare dell'intersezione delle diagonali $G$ rispetto alla circonferenza circoscritta, ovvero la retta $OG$ incontra $EF$ nell'inverso circolare di $G$, dove $O$ è il centro della circonferenza. Oppure, le rette che congiungono gli inversi circolari dei punti medi dei lati opposti concorrono in $G$, in quanto tali inversi sono i vertici del quadrilatero circoscritto che tange la circonferenza nei vertici di quello inscritto.

4. Dimostriamo ora il teorema di Chasles sulle proiettività tra fasci: siano $\mathfrak{F}_P$ e $\mathfrak{F}_Q$ due fasci di rette e sia $T$ una proiettività tra essi; allora l'insieme $\{s \cap T(s) \mid s \in \mathfrak{F}_P\}$ è una conica. Consideriamo una proiettività che porti $P$ e $Q$ in $[1,0,0]$ e $[0,1,0]$; ora prendiamo la carta affine $\{z = 1\}$. Il fascio $\mathfrak{F}_P$ è allora composto dalle rette $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$, similmente il fascio $\mathfrak{F}_Q$ è composto dalle rette $x = h$. Una proiettività tra i fasci, una volta fissati due riferimentri proiettivi nei due fasci, si scrive come

$$T(\lambda r + \mu r') = (a_{11}\lambda + a_{12}\mu)s + (\lambda a_{21} + \mu a_{22})s'$$

con $\{r, r', u\}$ riferimento in $\mathfrak{F}_P$ e $\{s, s', v'\}$ riferimento in $\mathfrak{F}_Q$. Possiamo fissare

$$r : \{y = 0\} \quad r' : \{z = 0\} \quad u = \{y + z = 0\}$$
$$s : \{x = 0\} \quad s' : \{z = 0\} \quad v = \{x + z = 0\}$$

e dunque, in affine, scrivere la proiettività come

$$T(\lambda r + \mu r') = T(\{\lambda x = -\mu\}) = \{(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)y = -(\lambda a_{21} + \mu a_{22})\}$$

Ora, intersecando le due rette si ottiene

$$y = -\frac{\lambda a_{21} + \mu a_{22}}{a_{11}\lambda + a_{12}\mu} = \frac{-(\lambda/\mu)a_{21} + a_{22}}{a_{11}(\lambda/\mu) + a_{12}} = \frac{a_{21}x + a_{22}}{a_{12} - a_{11}x}$$

che è l'equazione di una conica.

5. Consideriamo il fascio di circonferenze
$$\mathcal{F} : \{x^2 + y^2 - r^2 = 0 \mid r \in \mathbb{R}^*\}$$
Due di tali coniche non hanno punti di intersezione; passiamo al proiettivo e cerchiamo soluzioni (anche complesse) al sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - r^2z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - q^2z^2 &= 0 \end{cases}$$
Otteniamo che deve essere per forza $z^2 = 0$, ovvero $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 0$, dunque $x = \pm iy$; quindi otteniamo le due terne omogenee di soluzioni $[1, i, 0]$ e $[1, -i, 0]$, per cui "passano" tutte le coniche del fascio. Inoltre, dimenticandoci per un attimo che queste non sono terne di $\mathbb{P}^2$, calcoliamo l'equazione della tangente a una di queste circonferenze in uno di questi punti[21]:
$$(1, \pm i, 0) \cdot \mathrm{diag}(1, 1, -\mathrm{r}^2)(x, y, z)^t = x \pm iy = 0$$
che non dipende da $r$. Quindi questo fascio è descritto come l'insieme delle coniche proiettive che passano per i punti $[1, \pm i, 0]$ e in essi hanno tangente $\{x \pm iy = 0\}$; tale caratterizzazione algebrica è spesso utile.

6. Consideriamo ora due qualsiasi circonferenze, una delle quali supponiamo (a meno di omotetie) essere quella unitaria e cerchiamo le soluzioni (reali e complesse) del sistema di intersezione delle corrispondenti coniche proiettive:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2axz - 2byz - cz^2 &= 0 \end{cases}$$
otteniamo che deve essere $(c-1)z^2 + 2axz + 2byz = 0$ ovvero $z = 0$ oppure $(c-1)z + 2ax + 2by = 0$. Se $z = 0$, la prima equazione diventa $x^2 + y^2 = 0$ che ha soluzioni $(1, \pm i)$; se invece $z \neq 0$, abbiamo da risolvere l'equazione omogenea
$$x^2((1-c)^2 - 4a^2) + y^2((1-c)^2 - 4b^2) - 8abxy = 0$$
che ha soluzioni
$$\frac{x}{y} = \frac{4ab \pm |1-c|\sqrt{4a^2 + 4b^2 - (1-c)^2}}{(1-c)^2 - 4a^2}$$
ovvero dipendenti dai coefficienti e potranno essere reali o complesse a seconda delle due circonferenze. Dunque abbiamo dimostrato che due qualsiasi circonferenze del piano affine "passano" per i due "punti" complessi $[1, i, 0]$ e $[1, -i, 0]$.

## Esercizi

1. Sia $\mathcal{C} = \{xy + yz + zx = 0\}$ e sia $T_i : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la proiettività associata alla matrice $A_i$, per $i = 1, 2, 3$:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[21] $\mathrm{diag}(l, m, n)$ è la matrice diagonale che ha come elementi $l$, $m$, $n$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino le corrispondenti affini nella carta $\{z = 1\}$ delle coniche $T_i(\mathcal{C})$ per $i = 1, 2, 3$.

2. Data la conica $\mathcal{C} = \{x^2 + xy + yz = 0\}$, determinare tutte le proiettività $T$ tali che $T(\mathcal{C})$ abbia, nella carta $\{z = 1\}$, come centro il punto $(2, 3)$.

3. Sia $ABC$ un triangolo e sia $\omega$ la circonferenza inscritta in esso di centro $I$, che tange i lati $AB$, $AC$, $BC$ in $M$, $N$, $K$. Siano $L$ il punto medio di $BC$ e $D = AL \cap MN$. Allora $I$, $K$, $D$ sono allineati.

4. Determinare per quali proiettività $T$ tra fasci $\mathfrak{F}_P$ e $\mathfrak{F}_Q$ la conica

$$\{s \cap T(s) \mid s \in \mathfrak{F}_P\}$$

è degenere.

5. Dimostrare il teorema di Steiner: date due rette $r$, $s$ e una proiettività $T : r \to s$, le rette $\ell(P, T(P))$ per $P \in r$ inviluppano una conica.

6. Dimostrare che ogni conica non degenere e non vuota che "passa" per i punti $[1, i, 0]$ e $[1, -i, 0]$ è una circonferenza nella carta $\{z = 1\}$.

7. Determinare tutte coniche che corrispondono a circonferenze nella carta $\{z = 1\}$, passanti per il punto $[1, 1, 1]$ e che hanno "tangente" $\{x + iy - z = 0\}$ nel "punto" $[1, i, 0]$.

8. Date una conica non degenere $\mathcal{C}$ e una retta $r$, si consideri la mappa

$$H : P \mapsto \ell(\mathrm{pol}(r), P) \cap \mathrm{pol}(P)$$

e si dica per quali $P$ è definito $H(P)$. Scrivere poi le coordinate di $H(P)$ in funzione delle coordinate di $P$ e determinare l'immagine, sotto $H$, di una generica retta proiettiva.

## 2.5 Approfondimenti

In questa sezione tratteremo alcuni argomenti sparsi, riguardanti le coniche nel piano proiettivo, più avanzati rispetto al resto di queste note; per forza di cose, la discussione sarà imprecisa e abbozzata, non volendo o non potendo dare tutti i dettagli. Lo scopo principale di queste pagine è quello di offrire una visione più ampia delle possibilità offerte dalla geometria proiettiva.

### 2.5.1 Spazi proiettivi su campi qualsiasi

Sia $\mathbb{K}$ un campo; indicheremo con $[x_0, \ldots, x_n]$ l'insieme

$$\{(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_i = \lambda y_i,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$$

e lo chiameremo *n+1-upla omogenea a coefficienti in* $\mathbb{K}$. L'insieme

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \{[x_0, \ldots, x_n] \mid (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}\}$$

sarà detto spazio proiettivo $n-$dimensionale su $\mathbb{K}$. Osserviamo che c'è una corrispondenza bigettiva naturale tra $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ e l'insieme

$$H_n = \{[x_0, \ldots, x_{n-1}, 0] \mid (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n - \{0\}\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

Del resto, abbiamo anche la bigezione $j_n : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_n \to \mathbb{K}^n$ data da

$$j_n([x_0, \ldots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

Dunque

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

ed iterando

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}^{n-1} \cup \ldots \cup \mathbb{K} \cup \{0\}$$

Definiamo iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ l'insieme

$$\{[x_0, \ldots, x_n] \mid a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

con gli $a_i$ non tutti nulli; in generale, data una matrice $A$ con $k$ righe e $n+1$ colonne, definiremo un sottospazio proiettivo di dimensione $n-k$ come un insieme del tipo

$$\{[x_0, \ldots, x_n] \mid A \cdot (x_0, \ldots, x_n)^t = 0\}$$

Tali sottospazi si intersecheranno risolvendo i sistemi risultanti dall'unione delle loro equazioni di definizione.

Per $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, otteniamo la geometria proiettiva reale piana descritta finora; per $n = 3$ si ottiene la geometria proiettiva dello spazio, accennata in alcuni esempi ed esercizi. Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si ottiene una piccola variante della geometria studiata finora, che è la geometria proiettiva complessa. Per quanto riguarda la prima parte di queste dispense, rimane valido tutto quanto è stato detto; d'altra parte, sulle coniche il discorso cambia molto, in quanto due coniche si intersecano sempre in 4 punti contati con molteplicità (un punto ha molteplicità 2 se le due coniche non solo vi passano entrambe ma hanno anche la stessa tangente in esso), mentre nella geometria reale, due coniche possono essere disgiunte, inoltre tutte le coniche non degeneri sono proiettivamente equivalenti e non esistono coniche vuote. Questi fatti sono conseguenza del fatto che su $\mathbb{C}$ ogni polinomio si scompone in fattori lineari.

Tutti gli oggetti studiati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e descritti come luogo di zeri di un polinomio possono essere estesi in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, considerando sempre il luogo di zeri dello stesso polinomio, solo accettando anche gli zeri a coefficienti complessi; in questo modo ha un senso più preciso e geometrico la caratterizzazione proiettiva delle circonferenze affini data negli esempi della sezione precedente. Tutto l'apparato algebrico (polari e poli, dualità, tangenti e così via) rimane valido nella stessa forma, basta avere l'accortezza di considerare anche le soluzioni complesse di ogni equazione.

Un caso assai diverso dai precedenti e molto interessante per le sue implicazioni in combinatoria e teoria dei numeri è quello in cui $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, ovvero quando il campo ha un numero finito di elementi $q = p^k$, potenza di un numero primo[22]. Esaminiamo per ora il caso $k = 1$; $\mathbb{F}_p$ è l'insieme delle classi di resto modulo $p$ e dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ è l'insieme delle coppie omogenee $[m, n]$ con $m$, $n$ non entrambi congrui a 0 modulo $p$. Con la descrizione di prima, possiamo vedere che $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ si può ottenere da $\mathbb{F}_p$ con l'aggiunta di un elemento "infinito", dato dalla coppia $[1, 0]$, e dunque ha $N_1 = p + 1$ elementi; similmente, possiamo vedere che

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^2 \cup \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$$

e dunque il piano proiettivo su $\mathbb{F}_p$ ha $N_2 = p^2 + p + 1$ elementi.

Una retta in $\mathbb{F}_p^2$ (che è poi isomorfo come campo a $\mathbb{F}_{p^2}$, anche se questo non è affatto un risultato ovvio) è l'insieme delle soluzioni di una congruenza lineare a due variabili $ax + by \equiv c \mod p$; similmente, nel piano proiettivo finito, una retta sarà data dalle soluzioni della congruenza

$$\{ax + by + cz \equiv 0 \mod p\}$$

ovviamente considerate come terne omogenee. Tutto funziona come esposto nel caso dei coefficienti reali, anche le formule dei determinanti per trovare le intersezioni o la retta per due punti dati, solo modulo $p$.

Contare quante rette vi sono nel piano proiettivo finito su $\mathbb{F}_p$ è un problema semplice, se si ricorda che la dualità è una bigezione tra i punti e le rette del proiettivo, che dunque sono anch'esse $(p^3-1)/(p-1)$; inoltre, una retta è, come abbiamo osservato, naturalmente in bigezione con $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ e dunque ha $p + 1$ punti su di sè, quindi le rette che passano per un punto sono anch'esse $p + 1$.

Consideriamo ora il problema di quante quaterne di punti in posizione generale esistono in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$. Scegliamo due punti qualsiasi; questo può essere fatto, considerando anche l'ordine, in $N_2(N_2 - 1)$. Escludiamo poi la retta che contiene questi punti e scegliamo un punto dai rimanenti; possiamo farlo in $N_2 - N_1$ modi. Ora escludiamo le tre rette che contengono i tre punti e scegliamo un punto dai rimanenti; possiamo farlo in $N_2 - 3N_1 + 3$ modi. In totale abbiamo

$$\frac{1}{4!}N_2(N_2-1)(N_2-N_1)(N_2-3N_1+3) = \frac{1}{4!}p^3(p^3-1)(p^2-1)$$

Dunque, le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$, il cui insieme si indica con $\mathbb{P}GL_3(\mathbb{F}_p)$, sono $p^3(p^3-1)(p^2-1)$.

Le configurazioni di punti e rette ottenute nei proiettivi finiti sono spesso utili per produrre prove di esistenza nei problemi di combinatoria.

Questione molto più complicata e interessante (legata alla teoria dei numeri) è determinare quanti punti appartengono ad una data conica.

[22] Un insieme finito ammette una struttura di campo se e solo se ha $p^k$ elementi con $p$ primo e $k$ intero positivo.

### 2.5.2 Curve algebriche complesse

Come già detto, una curva algebrica proiettiva è il luogo di zeri di un polinomio omogeneo di grado $d$; se ammettiamo coefficienti e zeri complessi, otteniamo un sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, detto appunto curva algebrica complessa. Lo studio di tali curve è fondamentalmente lo studio dei polinomi che le descrivono, ammesso che questi siano irriducibili.

I *punti singolari* di una curva $\mathcal{A}$ descritta dal polinomio $F$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) &= 0 \\ F_y(x,y,z) &= 0 \\ F_z(x,y,z) &= 0 \\ F(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

Ad esempio, per la curva data dal polinomio $F(x,y,z) = y^3 + z^3 + xy^2$ si ha

$$\begin{cases} y^2 &= 0 \\ 3y^2 + 2xy &= 0 \\ 3z^2 &= 0 \\ y^3 + z^3 + xy^2 &= 0 \end{cases}$$

dalla prima e dalla terza si ricava $y = z = 0$, che soddifano anche la seconda e la quarta. Dunque questa curva di terzo grado (cubica) ha un solo punto singolare dato da $[1,0,0]$; questo mostra che in generale l'avere singolarità non implica l'essere riducibili, come invece avviene per le coniche, mentre il viceversa è vero.

I punti $P$ non singolari vengono detti *regolari* (o semplici) ed in essi si definisce la tangente alla curva come la retta

$$\{F_x(P)x + F_y(P)y + F_z(P)z = 0\}$$

Consideriamo ora una generica retta $r : \{\lambda A + \mu B \mid [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$ descritta in forma parametrica; per trovare le intersezioni con $\mathcal{A}$, dobbiamo cercare le soluzioni complesse di $G(\lambda,\mu) = F(\lambda A + \mu B) = 0$; questo polinomio $G(X,Y)$ può essere nullo (nel qual caso $F$ non era irriducibile e $r \subset \mathcal{A}$) oppure è per forza di grado $d = \deg F$. Tale polinomio si scompone completamente su $\mathbb{C}$ come prodotto di fattori lineari:

$$G(X,Y) = \prod_{i=1}^{h} (\mu_i X - \lambda_i Y)^{n_i}$$

dove $h \leq d$ e $n_1 + \ldots + n_h = d$, ovvero la soluzione $[\lambda_i, \mu_i]$ ha molteplicità $n_i$; diremo allora che la retta $r$ incontra $\mathcal{A}$ in $P_i = \lambda_i A + \mu_i B$ con molteplicità $n_i$ e scriveremo

$$i_{P_i}(r, \mathcal{A}) = n_i$$

In generale, vale il *teorema di Bezout* che afferma che due curve piane proiettive complesse irriducibili di gradi $m$, $n$ si intersecano in $mn$ punti contati con molteplicità.

Un punto è singolare se e solo se $i_P(r, \mathcal{A}) \geq 2$ per ogni $r \in \mathfrak{F}_P$; inoltre, $P$ si dirà punto $m-$uplo se esiste una retta $s \in \mathfrak{F}_P$ tale che la molteplicità di intersezione di $s$ con $\mathcal{A}$ in $P$ è proprio $m$. In un punto semplice, la tangente è l'unica retta che interseca in quel punto la curva con molteplicità 2; per analogia, in punto singolare $P$ che sia $m-$uplo, una retta $r$ si dice *tangente principale* se $i_P(r, \mathcal{A}) \geq m+1$ (tale tangente non è unica, in generale).

Un punto doppio con esattamente due tangenti si dice *nodo*, un punto doppio con una sola tangente si dice *cuspide*; un punto semplice in cui la tangente abbia molteplicità di intersezione $\geq 3$ si dice *flesso.*

Queste molteplicità di intersezione possono essere studiate in una opportuna carta affine: prendiamo in esame una curva d'equazione $F(x, y, z) = 0$ e un suo punto singolare $P$; se consideriamo una carta affine in cui esso sia l'origine, la curva affine corrispondente alla nostra sarà descritta da un polinomio $f(u, v)$ e se scomponiamo

$$f(u, v) = f_0 + f_1 + \ldots + f_d$$

con $f_i$ omogeneo di grado $i$, vediamo che:

- $P \in \mathcal{A} \Leftrightarrow f_0 = 0$
- $P$ è singolare se e solo se $f_1 = 0$
- $P$ è un punto $m-$uplo se e solo se $f_m \neq 0$ e $f_i = 0$ per $i < m$
- le tangenti in $P$ sono i fattori lineari di $f_m$
- $P$ è un flesso se e solo se $f_1 \neq 0$ ma $f_2 = 0$.

Quindi, ad esempio, un punto $P$ è un nodo se nella carta affine descrita, l'equazione della curva diventa del tipo $(au+bv)^2 + f_3(u, v) + \ldots$; inoltre, i flessi sono i punti in comune tra $\mathcal{A}$ e la curva descritta dagli zeri del polinomio

$$H(x) = \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij}$$

Tale curva si chiama *curva hessiana* di $F$.

Tutte queste caratteristiche sono proiettivamente invarianti e dunque, se vogliamo determinare quali curve possono essere portate l'una nell'altra con una proiettività, sicuramente dobbiamo distinguere quelle che hanno diversi tipi di punti singolari o diverse configurazioni di questi e dei punti di flesso.

Nel caso delle cubiche, $\{H(x) = 0\}$ è anch'essa una cubica e dunque ci sono 9 punti di flesso per una cubica generica; tali punti sono a 3 a 3 allineati. Infine, scegliendo uno di questi 9 flessi come unità (chiamiamolo $O$), possiamo definire su una cubica una legge di gruppo additivo: dati $A$, $B$, sia $C$ la terza intersezione della retta per $A$ e $B$ con la cubica e sia poi $A+B$ la terza intersezione di $CO$ con la cubica. E' abbastanza ovvio vedere che questa operazione è commutativa e $O$ è l'elemento neutro; la difficoltà sta nel verificare l'associatività.

Per le curve algebriche si pone, come per le coniche, il problema di classificarle a meno di proiettività; per le coniche irriducibili c'è una sola classe di equivalenza proiettiva, mentre ogni cubica non singolare è del tipo $\{y^2 z = (x(x-z)(x-cz)\}$ con $c \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$. Il parametro $c$ determina dunque la classe di equivalenza proiettiva della cubica, ma non biunivocamente: si può dimostrare che in ogni punto di flesso di una cubica non singolare passano 4 rette tangenti alla cubica (tra cui la stessa tangente del flesso) e $c$ è il birapporto tra queste quattro rette; l'invariante da considerare è

$$j = \frac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2 (c-1)}$$

che non cambia permutando le quattro rette e caratterizza pienamente la classe di equivalenza proiettiva.

### 2.5.3 Parametrizzazioni razionali

Una parametrizzazione di una curva algebrica è una funzione $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}$ che dia una corrispondenza biunivoca; è detta razionale se, letta in una qualche carta, diviene una funzione $\psi : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, realizzata da funzioni razionali. Ad esempio, ogni retta (curva algebrica di primo grado) ammette una parametrizzazione razionale data da

$$[\lambda, \mu] \mapsto [\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3]$$

con $A$, $B$, punti della retta; tale parametrizzazione è addirittura lineare (come è ovvio, essendo la curva una retta).

Studiamo il caso delle coniche; sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere e siano $P$ un suo punto e $r$ una retta non per $P$. Per ogni punto $Q$ di $r$, consideriamo la retta per $P$ e $Q$ e chiamiamo $R$ la sua intersezione con $\mathcal{C}$ distinta da $P$; la mappa $Q \mapsto R$ permette di definire una parametrizzazione di $\mathcal{C}$: basta fissare $A$, $B$ su $r$, scrivere $Q = \lambda A + \mu B$ e si ottiene la mappa

$$[\lambda, \mu] \mapsto R(\lambda, \mu)$$

Facciamone un calcolo esplicito, prendendo come conica $\mathcal{C}_0 : \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, come punto $P : [1, 0, 1]$ e come retta $r : \{x + z = 0\}$; consideriamo su $r$ i due punti $A : [1, 1, -1]$ e $B : [1, 0, -1]$, allora

$$Q : [\lambda + \mu, \lambda, -(\lambda + \mu)]$$

e dunque la retta per $P$ e $Q$ ha equazione

$$s : \{-\lambda x + 2(\lambda + \mu)y + \lambda z = 0\}$$

Tale retta incontra la conica nei punti le cui coordinate risolvono

$$x^2(4(\lambda + \mu)^2 + \lambda^2) - 2\lambda^2 xz - z^2(4(\lambda + \mu)^2 - \lambda^2) = 0$$

e le soluzioni di tale equazione sono

$$[x, z] = [1, 1] \qquad [x, z] = [\lambda^2 - 4(\lambda + \mu)^2, \lambda^+ 4(\lambda + \mu)^2]$$

e dunque il punto $R$ ha coordinate

$$[\lambda^2 - 4(\lambda + \mu)^2, -4\lambda(\lambda + \mu), \lambda^2 + 4(\lambda + \mu)^2]$$

Se ora consideriamo la carta affine $\{z = 1\}$, possiamo supporre che $\lambda + \mu \neq 0$ e dunque dividere, ottenendo la parametrizzazione

$$[t^2 - 1, -2t, t^2 + 1]$$

con $t = \lambda/2(\lambda+\mu)$; possiamo così riconoscere la classica parametrizzazione della circonferenza unitaria

$$t \mapsto \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

Osserviamo che la parametrizzazione in $\lambda, \mu$ funziona anche per il punto $[0, 1, 0]$, che corrisponde a prendere la tangente in $P$, e restituisce, in questo caso, proprio il punto $P$.

Per le cubiche, la situazione è più complicata ed in generale non è possibile trovare una parametrizzazione come quelle descritte; se però la cubica ha un punto doppio, possiamo sfruttarlo per ripetere il procedimento utilizzato per le coniche: infatti se $P$ è un punto doppio, ogni retta per $P$ incontra la cubica in al più un altro punto, se poi il punto è una cuspide, c'è una sola tangente principale e quindi al più un punto su cui la mappa non è definita (in realtà, come prima, la scrittura algebrica si rivela valida anche in quel caso). Prendiamo ad esempio la curva $\mathcal{A} : \{y^3 + z^3 + xy^2 = 0\}$ che, come abbiamo visto ha un punto singolare in $[1, 0, 0]$; considerandola nella carta affine $\{x = 1\}$, otteniamo il polinomio $f(u, v) = u^2 + v^3 + u^3$, quindi il punto è effettivamente un punto doppio ed è una cuspide, in quanto c'è una sola tangente doppia, $\{y = 0\}$.

Consideriamo la retta $r : \{x + z = 0\}$ con la stessa parametrizzazione di prima e consideriamo la retta per $P$ e $Q \in r$

$$s : \{-\lambda y + (\lambda + \mu)z = 0\}$$

Sostituendo nell'equazione della cubica otteniamo

$$y^3((\lambda + \mu)^3 + \lambda^3) + y^2x(\lambda + \mu)^3 = 0$$

da cui, scartando la soluzione $y = 0$ che porta a $P$,

$$[x, y] = [-(\lambda + \mu)^3 - \lambda^3, (\lambda + \mu)^3]$$

e dunque

$$R : [-(\lambda + \mu)^3 - \lambda^3, (\lambda + \mu)^3, \lambda(\lambda + \mu)^2]$$

Ancora una volta, considerando la carta $\{x = 1\}$, otteniamo che $\lambda + \mu \neq 0$ e dunque possiamo ottenere una parametrizzazione della cubica affine $u^2 + u^3 + v^3 = 0$:

$$t \mapsto \left(-\frac{1}{1 + t^3}, -\frac{t}{1 + t^3}\right)$$

Ed ancora una volta osserviamo che per $\lambda + \mu = 0$ si ottiene il punto $[1, 0, 0]$ da cui eravamo partiti.

Le parametrizzazioni razionali sono utili, ad esempio, per costruire punti razionali su una curva algebrica: se si conosce un punto a coordinate razionali su una conica, operando la costruzione descritta con una retta che abbia coefficienti razionali, otteniamo una parametrizzazione che, in corrispondenza di parametri $[\lambda, \mu]$ che hanno rapporto razionale, restituisce punti a coordinate razionali sulla conica.[23] Lo stesso discorso vale per le cubiche con una cuspide.

Per questo a volte è comunque interessante trovare una mappa

$$\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}$$

con componenti razionali, anche se non è bigettiva. Ad esempio, operando il procedimento descritto sopra con una cubica con un nodo si ottiene una

[23]Questo vale ogni volta che le coordinate appartengono ad un qualunque sottocampo contenente $\mathbb{Q}$.

mappa del genere, in cui la controimmagine del nodo è formata da due punti (geometricamente, questi corrispondono alle due tangenti principali del nodo). La richiesta diviene allora che la funzione $\phi$ sia bigettiva fuori da un numero finito di punti, come ad esempio accade per la parametrizzazione della curva $\{x^6 - zx^2y^3 - zy^5 = 0\}$ data da

$$[\lambda, \mu] \mapsto [(\lambda^2 + \mu^2)\lambda\mu^3, (\lambda^2 + \mu^2)\mu^4, \lambda^6]$$

Le curve che ammettono una simile parametrizzazione tramite funzioni razionali si dicono *curve razionali.*

### 2.5.4 Gruppo di simmetrie di una conica

Scopo dei paragrafi seguenti è determinare la struttura dell'insieme $\mathbb{P}S(\mathcal{C})$ delle proiettività che fissano una determinata conica $\mathcal{C}$. Se tale conica è descritta dalla matrice $A$, vogliamo trovare le matrici $M$ tali che $M^tAM = \pm A$, in tal modo la proiettività associata alla matrice $M^{-1}$ fisserà la conica.

Infatti, se $T$ è tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, ogni matrice $B$ associata a $T$ ha la proprietà che $(B^{-1})^tAB^{-1} = kA$ per qualche $k \in \mathbb{R}^*$, ma allora la matrice $\sqrt{|k|}B$ è tale che $(\sqrt{|k|}B)^{-1^t}A(\sqrt{|k|}B)^{-1} = kA/|k| = \pm A$. Del resto, osserviamo che $\det(M^tAM) = \det(kA)$ implica che $\det(M)^2 = k^3$, quindi $k > 0$; quindi, ad ogni proiettività $T$ che fissa $\mathcal{C}$ si può far corrispondere un'unica matrice $M$ tale che $M^tAM = A$ e $\det(M) = 1$ ed ogni tale matrice individua una diversa proiettività. L'insieme delle matrici ora descritte si indica di solito con $SO(A)$.

Notiamo che $M^tAM = A$ se e solo se $A = (M^{-1})^tAM^{-1}$; inoltre, se $M^tAM = A$ e $N^tAN = A$, si ha

$$(MN)^tA(MN) = N^tM^tAMN = N^tAN = A$$

e dunque $MN \in SO(A)$. Infine, ovviamente, $I \in SO(A)$. Quindi $SO(A)$ è un gruppo e dunque lo è anche $\mathbb{P}S(\mathcal{C})$.

Ora, se ho due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ non degeneri e non vuote, c'è una proiettività $S$ che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$ e dunque, se $T$ è una proiettività che fissa $\mathcal{C}$, $S \circ T \circ S^{-1}$ è una proiettività che fissa $\mathcal{C}'$. Dunque i gruppi $\mathbb{P}S(\mathcal{C})$ e $\mathbb{P}S(\mathcal{C}')$ sono coniugati in $\mathbb{P}GL_3(\mathbb{R})$, ovvero sono isomorfi.

Una proiettività del piano ha sempre almeno un punto fisso; sia $T \in \mathbb{P}S(\mathcal{C})$ e sia $P$ un punto fisso di $T$, $P \notin \mathcal{C}$. Ovviamente,

$$T(\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P)) = \mathrm{pol}_{T(\mathcal{C})}(T(P)) = \mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P)$$

dunque la polare di $P$ è lasciata fissa da $T$. Consideriamo dunque le intersezioni (reali o complesse) di $\mathrm{pol}(P)$ e di $\mathcal{C}$; questi sono anch'essi punti fissi della trasformazione e dunque le loro polari (le tangenti, reali o complesse alla conica in quei due punti) sono mandate in se stesse. Dunque $T$ fissa $P$ e i punti di $\mathrm{pol}(P) \cap \mathcal{C}$.

Sia ora $r$ una generica retta, siano $A$, $B$ le intersezioni di $\mathcal{C}$ con $r$ e siano $s$, $t$ le tangenti a $\mathcal{C}$ in $A$ e $B$ rispettivamente; sia $P = s \cap t$. Consideriamo una proiettività $T$ tale che $T(A) = A$, $T(B) = B$ e $T(P) = P$; questa proiettività manda $\mathcal{C}$ in una conica per $A$ e $B$, tangente a $s$ e $t$. Sia ora $Q \in \mathcal{C}$; se chiediamo che $T([1, 0, 1]) = Q$, otteniamo che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e dunque $T \in \mathbb{P}S(\mathcal{C})$.

Da quanto detto sopra, ogni proiettività in $\mathbb{P}S(\mathcal{C})$ che fissa un punto fuori da $\mathcal{C}$ è esprimibile con questa costruzione e dunque è associata ad una coppia $(r, Q)$ dove $r$ è una retta del piano e $Q \in \mathcal{C}$; indichiamo con $G_r$ il sottogruppo formato da tutte le formato da tutte le proiettività di $\mathbb{P}S(\mathcal{C})$ che fissano $r$.

Consideriamo dunque $G_r$ e $G_s$ con $r$ che non incontra $\mathcal{C}$, $s$ che la incontra in due punti $A$ e $B$; definiamo l'orbita di un punto $Q$ sotto l'azione di $G_r$ come l'insieme

$$G_r(Q) = \{T(Q)|T \in G_r\}$$

e similmente per $G_s$. Due orbite sotto l'azione di $G_r$ sono disgiunte oppure coincidono; due orbite sotto l'azione di $G_s$ hanno $A$ e $B$ in comune, oppure coincidono. Infatti, ogni tale orbita è una conica passante per i due punti, complessi o reali che siano, in cui la retta che caratterizza il gruppo interseca la conica e che in quei punti è tangente alla conica.

Siano ora $P$ e $Q$ due punti del piano, entrambi interni o entrambi esterni alla conica; se $G_r(P) = G_r(Q)$ o $G_s(P) = G_s(Q)$, allora esiste una proiettività in $G_r$ o $G_s$ che porta $P$ su $Q$ e lascia fissa $\mathcal{C}$. Altrimenti, esiste $R$ tale che $G_s(R)$ interseca sia $G_r(P)$ che $G_r(Q)$; se dunque $A \in G_s(R) \cap G_r(P)$ e $B \in G_s(R) \cap G_r(Q)$, possiamo trovare $T_1 \in G_r$ tale che $T_1(P) = A$, $T_2 \in G_s$ tale che $T_2(A) = B$ e $T_3 \in G_r$ tale che $T_3(B) = Q$. Allora la proiettività $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ porta $P$ in $Q$ e fissa $\mathcal{C}$.

In definitiva, comunque dati $P$ e $Q$, entrambi dentro, fuori o sulla conica, esiste $T \in \mathbb{P}S(\mathcal{C})$ tale che $T(P) = Q$; in generale questo è falso per due coppie di punti: dati $A$ e $B$, $C$ e $D$ tutti, ad esempio, all'interno di $\mathcal{C}$, siano $P$ e $Q$ le intersezioni di $AB$ con $\mathcal{C}$ e $R$ e $S$ quelle di $CD$, allora esiste $T \in \mathbb{P}S(\mathcal{C})$ che porta $A$ e $B$ in $C$ e $D$ se e solo se $(P; Q; A; B) = (R; S; C; D)$.

Per fare un esempio, fissiamo $\mathcal{C} : \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, $r : \{z = 0\}$ e $s : \{x = 0\}$. In tal modo, gli elementi di $G_r$ sono della forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e gli elementi di $G_s$ sono della forma

$$H_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ 0 & \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$$

Interpretando il piano proiettivo come rette per l'origine di $\mathbb{R}^3$, date due tali rette $r_1$, $r_2$, possiamo trovare $R_\alpha$, $R_\beta$ tali che $R_\alpha(r_1)$ e $R_\beta(r_2)$ siano entrambe nel piano $\{x = 0\}$; ora basta notare che, per ogni due numeri reali $t, t' \in (-1, 1)$ esiste $\phi$ tale che $H_\phi(0, t, 1) = k(0, t', 1)$ con $k \in \mathbb{R}^*$. In questo modo si vede che, scegliendo opportunamente $\alpha, \beta, \gamma$, si ha

$$R_\beta^{-1}(H_\gamma(R_\alpha(r_1))) = r_2$$

Abbiamo così dato una famiglia di trasformazioni del piano che conservano $\mathcal{C}$, il suo interno e il suo esterno. Su ciascuno di questi tre insiemi, esse sono transitive, ovvero dati due punti in uno di questi insiemi, c'è una tale trasformazione che porta il primo nel secondo; inoltre, tale proprietà non vale sulle coppie di punti. In un certo senso, queste proprietà sono quelle che caratterizzano le isometrie del piano euclideo, tramite le quali possiamo portare una coppia di punti su un'altra se e solo se la distanza tra i due punti in partenza e la distanza tra i due in arrivo sono uguali. L'aver individuato una tale famiglia di trasformazioni definisce una geometria nel senso di Klein su ciascuno dei tre insiemi suddetti.

Chiamiamo $\mathfrak{D}$ l'interno di $\mathcal{C}$ e definiamo, per ogni coppia di punti $X$ e $Y$ in $\mathfrak{D}$, $d(X, Y)$ come $\log(A; B; X; Y)$ con $A$, $B$ le intersezioni della retta per $X$ e $Y$ con $\mathcal{C}$. Si può verificare che $(A; B; X; Y)$ è sempre positivo e maggiore di 1, uguale a 1 se e solo se $X = Y$; quindi

1. $d(X, Y) \geq 0$ e $d(X, Y) = 0$ se e solo se $X = Y$
2. $d(X, Y) = d(Y, X)$
3. $d(X, Z) \geq d(X, Y) + d(Y, X)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $X$, $Y$, $Z$ sono allineati.

Dunque $d$ è una distanza su $\mathfrak{D}$. L'insieme $\mathfrak{D}$, munito di questa distanza, si dice *piano iperbolico*; per tale piano, i segmenti di retta proiettiva sono geodetici, ovvero sono curve di lunghezza minima tra due punti. Tale rappresentazione della geometria iperbolica si chiama *modello di Cayley-Klein* e può essere riportata nel piano euclideo, all'interno della circonferenza unitaria, prendendo la carta $\{z = 1\}$.

# Indice