Algebra

Sezione 1

1. Se $x + \dfrac{1}{x} = 3$, quanto vale $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$?

2. Dire quante soluzioni ha l'equazione $2^{x^2-3x+\sqrt{5}} = 1$.

3. Siano a, b, c numeri non nulli e si consideri l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Quanto vale (in termini di a e b) la somma dei reciproci delle radici di tale equazione ?

4. Nel piano cartesiano, dire quanti sono i punti $P = (x, y)$ a coordinate intere che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

5. Per quanti valori del parametro reale a il sistema
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)(y+a) = 0 \end{cases}$$
ammette una e una sola soluzione ?

6. Per quali valori di a il polinomio $(x-1)(x^2-a^2)(x^2-a-1)$ è divisibile per $x^2 + x - 2$?

7. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con tre radici intere distinte. Dimostrare che non esistono m, n interi distinti tali che $P(n) = P(m) = 3$.

8. $\star$ Siano $a_1, \ldots, a_n$ interi distinti. Dimostrare che
$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$$
è irriducibile, ovvero non è il prodotto di due polinomi a coefficienti interi di grado minore.

Sezione 2

1. Qual è il minimo valore dell'espressione $x^2 - 8xy - 6y + 14 + 19y^2$ al variare di x, y tra i numeri reali?

2. Quante sono le coppie di interi positivi (x, y) che soddisfano $x^2 + y^2 - 2004x + 2xy - 2004y + 2005 = 0$?

   Nota Bene : Se $x \neq y$ le coppie (x,y) e (y,x) sono da considerarsi diverse.

3. Sia $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una progressione aritmetica crescente di n termini (cioè la differenza tra due termini consecutivi è una costante positiva). Si domanda per quali valori di n possiamo trovare 3 termini della progressione la cui media aritmetica è uguale alla media aritmetica della progressione.

4. Qual è la somma algebrica dei coefficienti del polinomio

$$(x^{21} + 4x^2 - 3)^{2001} - (x^{21} + 4x^2 + 3)^{667} + x^{21} + 4x^2?$$

5. Siano a, b, c tre numeri reali. Si dimostri che il minimo tra $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(a-c)^2$ è minore o uguale a

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

6. Si definiscano i numeri $a_1, \ldots, a_n$ come segue :

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$$

Dimostrare che a_n è intero per ogni n.

7. Provare che se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che $P(0)$ e $P(1)$ sono interi dispari, allora $P(X)$ non può avere radici intere.

8. $\star$ Trovare tutti i polinomi f con coefficienti reali tali che, se a, b, c sono reali per cui $ab + bc + ca = 1$, allora

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c)$$

Sezione 3

1. Data una funzione tale che $f(x+1) = \dfrac{2f(x)+1}{2}$ e tale che $f(2) = 2$, quanto vale $f(1)$?

2. Dati $X = a + 7b$, $Y = 2a + 5b$, $Z = 4a + 2b$, dove a, b sono reali positivi. Cosa possiamo dire sull'ordine di X, Y, Z ? (Ad es. è vero che $Y < X < Z$?)

3. Sapendo che la disequazione $x \leq a\sqrt{x-1}$ nella variabile x ha una sola soluzione, si trovi il valore del parametro a.

4. Trovare una funzione non costante tale che $f(2x+1) = 2[f(x)]^2$.

5. Sia f una funzione reale di variabile reale tale che $f(10+x) = f(10-x)$ e $f(20+x) = -f(20-x)$ per ogni x. Si dimostri che f è periodica e dispari.

   (Una funzione è periodica se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni x; una funzione è dispari se, per ogni x, vale $f(x) = -f(-x)$).

6. Si dimostri la disuguaglianza

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

per qualunque valore reale positivo di x, y, z.

7. Si dimostri che per ogni coppia di reali positivi x, y tali che $x + y = 1$ si ha
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$
.

8. $\star$ Trovare tutte le funzioni strettamente crescenti o strettamente decrescenti $f : R \to R$ che verificano la relazione
$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$
per tutti gli x, y in R.

   Dimostrare che per ogni intero $n > 1$, non esistono funzioni reali di variabile reale tali che
$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$
per tutti gli x, y in R.

Combinatoria

Sezione 1

1. Quanti sono i percorsi diversi che connettono due vertici opposti A, B di un parallelepipedo, formati da spigoli dello stesso e che passano una e una sola volta per tutti i vertici?

2. Si dica quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tali che la somma dei propri elementi sia un numero dispari.

3. In quanti modi differenti si possono disporre i numeri da 1 a 6 in una sequenza ordinata $a_1, a_2, \ldots a_6$ in modo che si abbia $a_i \leq i + 2$ per $i = 1, 2, \ldots, 6$?

4. Prendiamo un cubo, coloriamo i vertici di 8 colori distinti e poniamolo su un tavolo. Una *manipolazione* del cubo consiste nel prendere il cubo e riappoggiarlo sul tavolo con una faccia rivolta verso di noi; consideriamo uguali due manipolazioni se dopo di esse il cubo si trova *esattamente* nella stessa posizione, ovvero se vertici dello stesso colore occupano la stessa posizione. Quante manipolazioni distinte del cubo esistono?

   Ripetere quanto sopra sostituendo al cubo gli altri 4 solidi regolari.

5. In un torneo di tennis 8 persone decidono di giocare gli incontri di doppio (due contro due) in tutti i modi possinili. Quanti incontri ci sono nell'intero torneo?

6. Fissato un numero reale a, dimostrare che fra i numeri
$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots,\ (n-1)a$$
ce n'é uno che dista al più $\frac{1}{n}$ da un intero.

7. $\star$ Sia $a_1, \ldots, a_n$ una successione finita di numeri reali tali che la somma di qualsiasi 7 elementi consecutivi sia positiva e la somma di qualsiasi 11 elementi consecutivi sia negativa. Determinare la lunghezza massima che può avere la successione.

Sezione 2

1. Calcolate la somma dei numeri minori di 1000 e relativamente primi con esso.

2. Fra i 33 studenti di una classe, 18 giocano a calcio, 17 a basket e 4 non praticano alcuno sport. Quanti sono gli studenti che giocano sia a calcio che a basket?

3. Quanti sono i possibili anagrammi della parola LICEALI tali che la C sia seguita dalla A?

4. Quanti sono i numeri di 10 cifre in cui la cifra 1 compare esattamente una volta, la cifra 2 esattamente due volte, la cifra 3 esattamente tre volte e la cifra 4 esattamente 4 volte?

5. Abbiamo 5 scatole, etichettate da 1 a 5 e quattro palline indistinguibili l'una dall'altra. In quanti modi diversi possiamo mettere le palline nelle scatole?

   Abbiamo 5 scatole indistinguibili e 4 palline colorate con 4 colori. In quanti modi diversi possiamo mettere le palline nelle scatole?

   Nota Bene : fate attenzione a cosa significa l'espressione "modi diversi" in ciascuno dei due casi.

6. Prendiamo i 90 bussolotti della tombola (numerati da 1 a 90); quanti sono i modi di disporli sul cartellone della tombola (recante spazi numerati da 1 a 90) di modo che nessun bussolotto occupi la posizione corrispondente al proprio numero?

7. Abbiamo 8 carte: l'asso, il due, il tre e il quattro di cuori e le stesse carte di picche; in quanti modi possiamo disporle alternando cuori e picche di modo che i due assi non stiano in posizioni contingue?

8. $\star$ Contare le funzioni surgettive da un insieme A di n elementi ad un insieme B di m elementi.

Sezione 3

1. L'influenza pisana si può evitare al 95% prendendo il vaccino o, indipendentemente, al 25% risiedendo in campagna. Qual è la probabilità di evitare l'influenza se si risiede in campagna e si prende il vaccino?

2. Abbiamo due dadi uguali, ciascuno con una faccia rossa, due gialle e tre blu. Qual è la probabilità che lanciandoli insieme di ottengano due facce dello stesso colore?

3. Nella provincia di Pisa, una persona su 20.000 è affetta da una malattia rara. Il test diagnostico per accertare la presenza della malattia ha una affidabilità del 95% (cioè, in media, 5 volte su 100 il risultato è l'opposto di quello che dovrebbe essere). Marco si sottopone a questo test e risulta affetto dalla malttia. Qual è la probabilità che Marco sia effettivamente malato?

4. Sappiamo che lanciando due dadi la somma dei due risultati può essere un qualunque numero compreso tra 2 e 12, ma tali risultati non sono equiprobabili. In quanti modi è possibile rinumerare le facce dei due dadi con interi non negativi in modo che la somma ottenuta in ogni lancio possa essere ogni numero intero compreso tra 0 e 11, ed ogni risultato sia ugualmente probabile (cioè con probabilità 1/12) ?

5. Con un vostro amico, partecipate ad uno strano gioco : entrambi partite senza gettoni e iniziate a tirare una monetina, una volta per uno. Se fate testa ricevete un gettone, se fate croce ne ricevete due; vincerete il gioco quando arriverete a possedere 100 gettoni.Dire se la probabilità di vittoria (ovvero di arrivare a 100 gettoni prima che ci arrivi il vostro amico) è maggiore, uguale o minore di 2/3.

6. Un ubriacone frequenta quattro osterie A, B, C, D; vi sono cinque strade che collegano A con B, A con C, C con D, B con D, C con B. Dopo aver abbondantemente bevuto nell'osteria A, il nostro ubriacone imbocca con pari probabilità una delle due strade che si dipartono da A e raggiunge una delle due osterie collegate ad A, dove ordina dell'altro vino. Procedendo in tal modo (ogni volta con pari probabilità di arrivare in una delle osterie direttamente collegate a quella in cui si trova), qual é la probabilità che faccia il quinto "brindisi " nell'osteria C? Dove è più probabile che si trovi dopo n bevute?

Sezione 4

1. Un cerchio è diviso da 6 raggi in altrettanti settori; in essi vengono scritti, in senso orario, i numeri $1, 0, 1, 0, 0, 0$, uno per settore. Si può compiere una mossa che consiste nell'aumentare di 1 i numeri scritti in due settori adiacenti. E' possibile arrivare ad una configurazione in cui vi sono tutti numeri uguali ?

2. Prendiamo una scacchiera 8×8 e togliamole due caselle d'angolo opposte; è possibile ricoprirla completamente con tessere del domino (rettangoli lunghi 2 caselle e larghi 1), evitando sovrapposizioni e senza far sporgere le tessere fuori dalla scacchiera?

3. Dimostrare che esiste un N tale che per ogni $n > N$ si può dividere un quadrato in n quadratini che non si intersecano (ovvero che non hanno punti interni in comune).

4. Alcune palline sono distribuite in $2n+1$ sacchetti. Supponiamo che, tolto un qualunque sacchetto, possiamo dividere i restanti in due gruppi di n sacchetti, in modo che ciascun gruppo contenga lo stesso numero complessivo di palline. Dimostrare che ogni sacchetto contiene lo stesso numero di palline.

5. Data una scacchiera $n \times n$ con $n = 2^q$, q naturale, leviamole una casella. Dimostrare che quel che resta é tassellabile (ricopribile senza sovrapposizioni e debordamenti) con tessere a forma di L estese su 3 caselle.

6. Sia data una scacchiera 100×100 completamente bianca. E' possibile colorare di nero un numero dispari di caselle di modo che ogni casella colorata abbia un numero dispari di caselle colorate adiacenti?

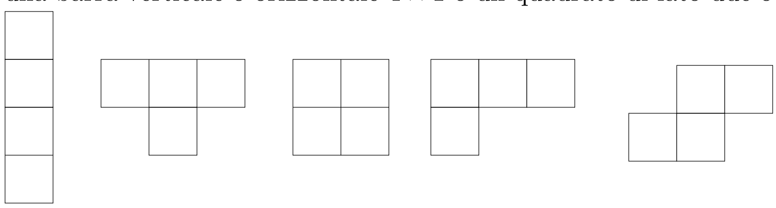
   E' possibile colorare alcune caselle di modo che un numero dispari di esse abbia esattamente 4 caselle colorate adiacenti e tutte le altre ne abbiano esattamente 2?

   E' possibile colorare alcune caselle di modo che un numero dispari di esse abbia esattamente 2 caselle colorate adiacenti e tutte le altre ne abbiano esattamente 2?

7. Un pannello contiene 100 lampadine, disposte in un quadrato 10×10; alcune sono accese, altre spente. L'impianto è fatto in modo che, se viene premuto l'interruttore corrispondente ad una certa lampadina, cambiano di stato (oltre a lei) tutte le lampadine sulla sua stessa riga e sulla sua stessa colonna. Da quali configurazioni si deve partire per poter arrivare ad una configurazione con tutte le lampadine accese?

   Qual è la risposta alla domanda precedente se le lampadine sono 81 e sono disposte su un quadrato 9×9 ?

8. $\star$ Un tetramino è un pezzo che copre quattro caselle della scacchiera (ad es. una barra verticale o orizzontale 4×1 o un quadrato di lato due o altro).

   Dimostrare che una scacchiera 10×10 non può essere ricoperta nè da 25 tetramini a T nè da 25 tetramini dritti.

   Può essere coperta da tetramini a L (il quarto tipo da sinistra nell'immagine) ?